

Prova Scritta Elettromagnetismo - 8.02.2019
(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Una carica elettrica $Q = 2.5 \mu\text{C}$ è distribuita su un volume sferico di raggio $R = 10.0 \text{ cm}$ con densità $\rho(r) = \alpha r^2$ dipendente solo dalla distanza radiale dal centro essendo α costante.

Si determini:

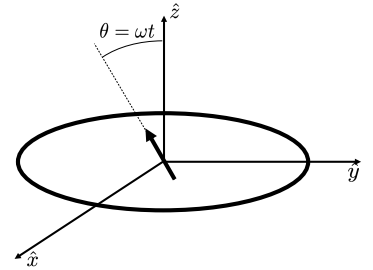
- a) il valore della costante α ;
- b) come varia il campo elettrico all'interno e all'esterno della sfera;
- c) l'energia elettrostatica totale;
- d) il potenziale elettrico al centro della sfera e sulla superficie riferiti a un potenziale nullo a distanza infinita.

Esercizio 2

Una dipolo magnetico di momento magnetico $m = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ Am}^2$ è posto al centro di una spira circolare di raggio $a = 2.5 \text{ cm}$, e resistenza elettrica $R = 2.0 \text{ m}\Omega$. Il sistema di assi cartesiani è definito in modo che l'origine sia nel centro della spira e gli assi \hat{x} e \hat{y} nel suo piano. Il dipolo viene fatto ruotare con velocità angolare costante $\omega = 1500 \text{ rad/s}$ nel piano \hat{y}, \hat{z} .

Si determini:

- a) l'espressione della corrente che scorre nella spira, e il suo valore massimo (trascurando il coefficiente di autoinduzione della spira);
- b) l'espressione del momento meccanico esterno necessario a mantenere il dipolo in rotazione, e il suo valore medio;
- c) Si mostri che la potenza meccanica fornita è eguale alla potenza dissipata per effetto Joule, e si calcoli la potenza media dissipata.



Soluzione

Esercizio 1

a)

Integrando sul volume sferico si trova:

$$Q = \int_0^R \alpha r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\alpha}{5} R^5 \quad \alpha = \frac{5}{4\pi} \frac{Q}{R^5} = 0.10 \text{ C/m}^5$$

b)

Dalla prima equazione di Maxwell, scrivendo la divergenza in coordinate sferiche, all'interno della sfera si trova:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r(r)) = \frac{\alpha r^2}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad r^2 E_r(r) \Big|_0^r = \int_0^r \frac{\alpha r^4}{\epsilon_0} dr$$
$$E_r(r) = \frac{\alpha}{5\epsilon_0} r^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^5} r^3$$

Anche dal teorema di Gauss:

$$\Phi(E_r) = 4\pi r^2 E_r = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

All'esterno ricordando le proprietà della distribuzione sferica o dal teorema di Gauss si trova:

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

c)

L'energia elettrostatica si calcola integrando la densità da $r = 0$ a $r = \infty$:

$$U_{es} = \int_0^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E_r^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^5} \right)^2 r^6 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr =$$
$$= \frac{1}{18} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} = \frac{5}{9} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} = 0.31 \text{ J}$$

d)

Per il calcolo del potenziale possiamo scrivere:

$$V(R) - V(0) = - \int_0^R E_r(r) dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^5} \int_0^R r^3 dr = - \frac{1}{4} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$
$$V(0) = V(R) + \frac{1}{4} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

inoltre:

$$V(\infty) - V(R) = - \int_R^\infty E_r(r) dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$
$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = 225 \text{ kV} \quad V(0) = \frac{5}{4} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = 281 \text{ kV}$$

Esercizio 2

a)

La corrente sulla spira è dovuta alla forza elettromotrice indotta dalla variazione del flusso del campo magnetico:

$$f_{em.} = - \frac{d\Phi_2(\mathbf{B}_1)}{dt}$$

dove abbiamo indicato con il pedice 1 il dipolo magnetico e con il pedice 2 la spira. Il calcolo del campo magnetico su tutta la superficie della spira è complicato, ma è possibile semplificarlo tenendo conto della mutua induzione:

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = M_{21} I_1$$

e del fatto che il coefficiente di mutua è simmetrico:

$$M = M_{21} = M_{12} = \frac{\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{I_2}$$

È facile calcolare il flusso del campo magnetico dovuto alla spira, sul piccolo dipolo elettrico. Se nella spira passasse una corrente I_2 , il campo di induzione magnetica al centro della spira sarebbe

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2a} \hat{z}$$

Possiamo considerare il dipolo magnetico come una piccola spira di area S , percorsa dalla corrente I_1 , per cui $S = m/I_1$. Il coefficiente di mutua induzione vale:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{\int \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS}{I_2} \\ &= \frac{\mu_0 I_2}{2a I_2} S \cos \omega t \\ &= \frac{\mu_0 m}{2a I_1} \cos \omega t \end{aligned}$$

A questo punto possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta sulla spira come:

$$f_{em} = -\frac{d}{dt}(M_{12} I_1) = -\frac{\mu_0 m I_1}{2a I_1} \frac{d}{dt} \cos \omega t = \frac{\mu_0 m}{2a} \omega \sin \omega t$$

e la corrente indotta vale

$$I_2(t) = \frac{\mu_0 m}{2a R} \omega \sin \omega t$$

che ha come valore massimo

$$I_{2,max} = \frac{\mu_0 m}{2a R} \omega = 8.5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

b)

Il momento meccanico che agisce sul dipolo a causa del campo magnetico generato dalla spira vale

$$\mathbf{M}_{\text{int}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Per cui il momento magnetico esterno vale

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{M}_{\text{int}} = -\mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

quindi il suo modulo vale:

$$|\mathbf{M}_{\text{ext}}| = \frac{\mu_0 I_2 m}{2a} \sin \omega t$$

inserendo il risultato per $I_2(t)$ alla domanda precedente, e tenendo conto che la sola componente diversa da zero quella diretta lungo l'asse \hat{x} , si ha

$$M_{\text{ext},x} = \left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2 \frac{\omega}{R} \sin^2 \omega t$$

per quanto riguarda il segno, si nota che il dipolo magnetico tende ad allinearsi al campo magnetico. Quindi, per angoli θ tra 0 e $\pi/2$, quando la corrente circola in verso orario nella spira, il momento esterno deve avere segno positivo.

Il valore medio vale

$$\langle M_{\text{ext},x} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2 \frac{\omega}{R} = 4.8 \cdot 10^{-9} \text{ Nm}$$

c)

La potenza meccanica per mantenere in moto il dipolo vale

$$P = M_{\text{ext},x} \omega = \left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2 \frac{\omega^2}{R} \sin^2 \omega t$$

La potenza dissipata per effetto Joule vale:

$$P = \frac{f_{em}^2}{R} = \left(\frac{\mu_0 m}{2a} \omega \sin \omega t\right)^2 \frac{1}{R}$$

Le due potenze sono quindi uguali. La potenza media vale:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 m}{2a}\right)^2 \frac{\omega^2}{R} = 7.1 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$