Prova Scritta Elettromagnetismo - 07.05.2019

(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

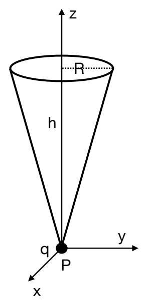
Il sistema in figura è costituito da una carica puntiforme $q = 1\,\mu$C posta nel punto P, e da una distribuzione statica di carica elettrica disposta sulla superficie di un cono rovesciato di altezza $h = 50\,$cm e raggio di base $R = 10\,$cm. La densità di carica sulla superficie del cono è descritta dall'espressione $\sigma(z) = \frac{\sigma_0}{h}z$, con $z \in [0, h]$ la coordinata sull'asse z in figura a rispetto al punto P. Sapendo che la carica elettrica totale depositata sulla superficie del cono è pari a $-q$, determinare:

a) σ_0;

b) il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione conica nel punto P;

c) il momento di dipolo elettrico del sistema;

d) la velocità minima che bisogna imprimere alla carica q di massa $m = 1\,$g posta in P affinché possa portarsi a distanza infinita lungo la direzione $-z$ dal punto P.



Esercizio 2

Un carrellino scorre senza attrito con velocità iniziale $v_0 = 3.5$ m/s su un binario orizzontale rettilineo, da assumere come asse x. Sul carrellino è montato un avvolgimento di $N = 40$ spire complanari quadrate con i lati di lunghezza $\ell = 2.0\,$cm, paralleli agli assi x e z, di filo di rame di sezione circolare $r = 0.5\,$mm di diametro, ($\rho_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-9}\,\Omega$m) con la normale orientata lungo l'asse y . La massa totale del carrellino con le spire vale $m = 30\,$g. Nella regione di spazio $x > 0$ si ha un campo magnetico di induzione B diretto lungo l'asse y e avente modulo $B = 0.2\,$T, mentre il campo è nullo per $x \leq 0$.

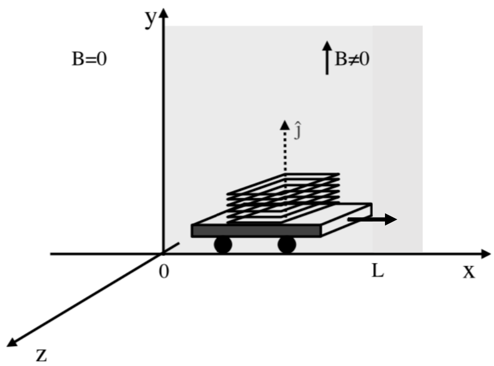
Si determini:

a) la forra elettromotrice fem indotta sull'avvolgimento e la corrente mentre entra e transita nella regione in cui il campo di induzione magnetica è diverso da zero, esprimendo le grandezze in funzione della velocità;

b) l'andamento della velocità in funzione del tempo, mentre il carrello è parzialmente inserito nella regione in cui il campo magnetico è diverso da zero, facendone un grafico schematico;

c) lo spazio percorso in funzione del tempo, mentre il carrello è parzialmente inserito nella regione in cui il campo magnetico è diverso da zero;

d) il valore minimo di ℓ per cui il carrello si ferma in un tratto finito.



Soluzione 1

a)

$$Q_{cono} = -q = \int \sigma dS = \int_0^h \frac{\sigma_0}{h} z 2\pi z \tan\alpha \frac{dz}{\cos\alpha} = \frac{2}{3}\pi\sigma_0 R\sqrt{R^2+h^2};$$

$$\sigma_0 = -\frac{3q}{2\pi R\sqrt{R^2+h^2}} = -9.4\ 10^{-6}\ C/m^2.$$

b)

$$V(P) = V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma ds}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^h \frac{\sigma_0}{h} z 2\pi z \tan\alpha \frac{dz}{\cos\alpha}\frac{1}{\frac{z}{\cos\alpha}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma_0}{h} z 2\pi \tan\alpha \int_0^h zdz = \frac{\sigma_0 Rh}{4\epsilon_0} = -13.2\ kV.$$

c)

$$\vec{p} = \hat{z}p_z = \hat{z}\int \sigma z dS = \hat{z}\int_0^h z\frac{\sigma_0}{h} z 2\pi z \tan\alpha \frac{dz}{\cos\alpha} = \hat{z}\frac{\sigma_0 2\pi}{h}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\int_0^h z^3 dz = \hat{z}\frac{\pi\sigma_0}{2}Rh\sqrt{R^2+h^2} = -3.6\ 10^{-7}\ Cm\ \hat{z}.$$

d)
Applicando la conservazione dell'energia:

$$K_i + qV(0) = K_f + qV(\infty) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -qV(0) = \frac{-q\sigma_0 Rh}{4\epsilon_0} = \frac{3q^2 h}{8\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+h^2}}.$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{3q^2 h}{4\pi m\epsilon_0\sqrt{R^2+h^2}}} = 5.1\ m/s.$$

Soluzione 2

a) La forza elettromotrice vale

$$fem = \frac{d\Phi(B)}{dt} = Nv\ell B$$

La resistenza dell'avvolgimento vale:

$$R = \frac{4N\ell}{\pi r^2}\rho_{Cu}$$

quindi la corrente vale:

$$I = \frac{fem}{R} = Nv\ell B\frac{\pi r^2}{4N\ell\rho_{Cu}} = \frac{vB\pi r^2}{4\rho_{Cu}}$$

b)
Sul ramo dell'avvolgimento immerso nel campo magnetico si esercita una forza

$$F = -B\ell NI$$

tale forza si oppone al flusso tagliato e si annulla nel momento in cui l'avvolgimento è completamente immerso nel campo B. Nel tratto x compreso tra 0 e ℓ, l'equazione del moto è:

$$m\dot{v} = -B\ell N\frac{B\pi r^2}{4\rho_{Cu}}v$$

quindi

$$\dot{v} = -B\ell N\frac{B\pi r^2}{4\rho_{Cu}m}v = -\frac{v}{\tau}$$

con

$$\tau = \frac{4\rho_{Cu}m}{N\ell B^2\pi r^2} = 8.1\,\mathrm{ms}$$

La velocità in funzione del tempo vale quindi:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

c)
Lo spazio percorso si ottiene integrando nel tempo:

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-t'/\tau}dt' = v_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Il tratto $0 < x < \ell$ è percorso nel tempo:

$$t = -\tau\ln\left(1 - \frac{\ell}{v_0\tau}\right) = 10\,\mathrm{ms}$$

Per $x > \ell$, $m\dot{v} = 0$, e $v =$cost.
d)
affinché il carrello si fermi, è necessario che la spira sia più lunga dello spazio totale percorso in decelerazione. Il carrello quindi deve impiegare un tempo infinito a fermarsi. Si ha:

$$\ell > x(t = \infty) = v_0\tau$$

Ricordando che τ dipende da ℓ, si ha:

$$\ell > v_0\frac{4\rho_{Cu}m}{N\ell B^2\pi r^2}$$

e quindi

$$\ell > \sqrt{v_0\frac{4\rho_{Cu}m}{NB^2\pi r^2}} = 2.4\,\mathrm{cm}$$