Prova Scritta Elettromagnetismo - 19.7.2019

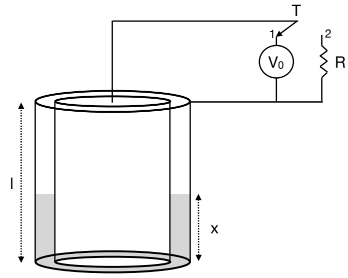
(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

---

recupero primo esonero: risolvere l'esercizio 1: tempo massimo 1.5 ore.
recupero secondo esonero: risolvere l'esercizio 2: tempo massimo 1.5 ore.
intero scritto: risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

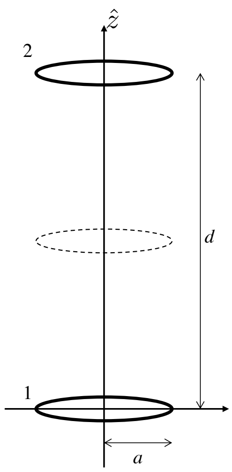
Un condensatore cilindrico di lunghezza $l = 1\,\mathrm{m}$ ha, nel vuoto, una capacità elettrica $C_0 = 100\,\mathrm{nF}$. Tramite un interruttore T il condensatore viene collegato ad un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 100\,\mathrm{V}$. Dell'acqua distillata (costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 80$) viene versata nelle armature fino a riempirlo completamente. Trascurando gli effetti di bordo determinare:
a) l'espressione della capacità del condensatore in funzione dell'altezza del livello dell'acqua x (vedi figura) e calcolarne il valore numerico quando $x = l$ (condensatore completamente riempito);
b) la carica Q presente sulle armature del condensatore quando quest'ultimo risulta completamente riempito di acqua;
c) il lavoro fatto dal generatore durante l'operazione di riempimento del condensatore (da $x = 0$ a $x = l$).



In seguito, a condensatore completamente pieno, il generatore viene disconnesso dal circuito, e l'interruttore T viene chiuso su una resistenza $R = 1.0 \cdot 10^6\,\Omega$. Il condensatore viene svuotato in modo tale che il livello del acqua diminuisce nel tempo con legge $x(t) = l - kt$ con k costante pari a $k = 100\,\mathrm{m/s}$:
d) determinare la legge $Q(t)$ con cui varia nel tempo la carica sulle armature del condensatore e il valore della carica al tempo $t = l/k$.

Esercizio 2

Una avvolgimento circolare di raggio $a = 6.0\,\mathrm{mm}$, resistenza $R = 1.0\,\Omega$, composto da $N = 500$ spire è posto nell'origine di un sistema di riferimento, come in figura. Nell'avvolgimento viene fatta scorrere, in verso antiorario, una corrente secondo la legge $I_1(t) = \alpha t$, con $\alpha = 5.0\,\mathrm{A/s}$. Un secondo avvolgimento, di uguali caratteristiche è posto, parallelamente al primo, sull'asse $\hat{z}$, a distanza $d = 30\,\mathrm{cm}$ dall'origine. Trascurando i coefficienti di autoinduzione, e facendo l'ipotesi $d \gg a$, si calcoli:
a) la corrente $I_2(t)$ che scorre nel secondo avvolgimento, indicandone il valore e il verso di percorrenza;
b) le espressioni della forza e del momento meccanico a cui è soggetto il secondo avvolgimento, in funzione del tempo, indicandone il valore numerico per $t = 3.0\,\mathrm{s}$;
c) le espressioni della forza e del momento meccanico a cui è soggetto il secondo avvolgimento, in funzione del tempo, indicandone il valore numerico per $t = 3.0\,\mathrm{s}$, nel caso in cui il secondo avvolgimento sia ruotato di 90°, in modo da avere il suo asse ortogonale all'asse $\hat{z}$;
d) il campo elettrico generato dai due avvolgimenti su una circonferenza di raggio a posta a distanza intermedia tra i due avvolgimenti (nell'approssimazione $d/2 \gg a$).



Soluzione
Esercizio 1
a)

quando il condensatore cilindrico è riempito fino ad una altezza x di acqua la sua capacità risulta equivalente a quella di due condensatori cilindrici in parallelo uno di altezza x riempito di acqua e uno di altezza $l-x$ vuoto. Avremo quindi:

$$C(x) = C_{vuoto} + C_{H_2O} = \frac{4\pi\epsilon_0(l-x)}{\ln\frac{R_2}{R_1}} + \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r x}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = C_0\frac{l-x}{l} + C_0\epsilon_r\frac{x}{l} = \frac{C_0}{l}(l + (\epsilon_r - 1)x);$$

avendo indicato con $C_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$ la capacità del condensatore cilindrico vuoto. Per $x = l$ avremo: $C(l) = C_0\epsilon_r = 8.0\,\mu\text{F}$.

b)
Quando completamente riempito avremo: $Q(x = l) = V_0 C(l) = V_0 C_0 \epsilon_r = 0.8\,\text{mC}$.

c)
Il lavoro fatto dal generatore è pari a $L_G = \int_{Q_i}^{Q_f} V_0\,dQ = Q_f V_0 - Q_i V_0 = (Q_f - Q_i)V_0$ che come noto, a potenziale costante, è pari a due volte la differenza di energia elettrostatica del condensatore tra lo stato iniziale $x = 0$ e quello finale $x = l$:

$$L_G = V_0 C_0 \epsilon_r V_0 - V_0 C_0 V_0 = C_0 V_0^2(\epsilon_r - 1) = 2(U_e^f - U_e^i) = 80\,mJ$$

La differenza tra il lavoro L_G e la variazione di energia elettrostatica, pari all'energia elettrostatica, corrisponde lavoro fatto dalle forze elettrostatiche durante l'immissione del liquido nel condensatore.

d)
L'equazione del circuito per $t \leq l/k$, considerando positiva la corrente i uscente dal condensatore e che attraversa la resistenza, è data da:

$$V_C = \frac{Q}{C} = Ri \qquad i = -\frac{dQ}{dt} \qquad \frac{Q(t)}{C(t)} = -R\frac{dQ}{dt} \qquad -\frac{dt}{RC_0(\epsilon_r + (1-\epsilon_r)\frac{k}{l}t)} = \frac{dQ}{Q}$$

avendo separato le variabili. Questa può essere facilmente intergrata:

$$\int_{Q(0)}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC_0}\frac{dt'}{(\epsilon_r + (1-\epsilon_r)\frac{k}{l}t')} \to Q(t) = Q(0)\left(\frac{\epsilon_r}{(\epsilon_r + (1-\epsilon_r)\frac{k}{l}t)}\right)^{\frac{1}{RC_0\frac{k}{l}(1-\epsilon_r)}}$$

per cui:

$$Q(t = \frac{l}{k}) = Q(0)(\epsilon_r)^{\frac{1}{RC_0\frac{k}{l}(1-\epsilon_r)}} = V_0 C_0 \epsilon_r (\epsilon_r)^{\frac{1}{RC_0\frac{k}{l}(1-\epsilon_r)}} = V_0 C_0 (\epsilon_r)^{1+\frac{1}{RC_0\frac{k}{l}(1-\epsilon_r)}} = 0.795\,mC$$

Per $t > l/k$ a condensatore completamente vuoto la legge segue quella esponenziale di scarica di un condensatore con costante di tempo $\tau = RC_0$ e $Q(iniziale) = Q(t = l/k)$.

Esercizio 2

a)

Nell'ipotesi $d \gg a$, il campo generato dalla spira 1 nello spazio occupato dalla spira 2 può essere considerato uniforme, di valore

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 N I_1(t)}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{z=d} \hat{z} \simeq \frac{\mu_0 a^2 N I_1}{2d^3} \hat{z}$$

Il coefficiente di mutua induzione vale

$$M_{21} = \frac{\Phi_2(\vec{B})}{I_1} = \frac{N\pi a^2 |\vec{B}|}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a^4 N^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{z=d} \simeq \frac{\mu_0 \pi a^4 N^2}{2d^3} = 23.7\,\mathrm{nH}$$

Trascurando l'autoinduzione, nel secondo avvolgimento è presente una fem indotta dalla variazione di flusso di campo magnetico. L'equazione del circuito nel secondo avvolgimento è:

$$f_{21} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = RI_2 \qquad -M_{21}\frac{dI_1}{dt} = RI_2$$

e quindi

$$I_2 = -\frac{M_{21}}{R}\frac{dI_1}{dt} = -\frac{M_{21}}{R}\alpha = -\frac{\mu_0 \pi a^4 N^2 \alpha}{2Rd^3} = -1.18 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{A}$$

Per la legge di Lenz, questa corrente deve generare un campo di induzione magnetica che si oppone alla variazione del flusso di B. Quindi se la corrente nel primo avvolgimento scorre in verso antiorario, generando un campo che cresce parallelo a $\hat{z}$, la corrente I_2 deve scorrere in verso orario ed è quindi negativa.

b)

Il momento meccanico può essere calcolato come

$$\vec{M} = \vec{m}_2 \times \vec{B} = 0$$

essendo

$$\vec{m}_2 = \pi a^2 N I_2 \hat{z} = -\frac{\mu_0 \pi^2 a^6 N^3 \alpha}{2Rd^3}\hat{z}$$

anti-parallelo a $\vec{B}$. Essendo il momento magnetico anti-parallelo al campo di induzione magnetica, si tratta di un punto di equilibrio instabile.

La forza sul secondo avvolgimento vale

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla}(m_{2,z} B_z) = \frac{d(m_{2,z} B_z)}{dz}\bigg|_{z=d} \hat{z}$$

Si deve tener conto del fatto che sia B sia m_2 variano con la distanza z tra le due spire:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 a^2 N I_1}{2z^3} = \frac{\mu_0 a^2 N \alpha t}{2z^3}$$

$$m_{2,z}(z) = -\frac{\mu_0 \pi^2 a^6 N^3 \alpha}{2Rz^3}$$

Quindi

$$F_z(t) = \frac{d}{dz}\left(-\frac{\mu_0 a^2 N \alpha t}{2z^3}\frac{\mu_0 \pi^2 a^6 N^3 \alpha}{2Rz^3}\right)\bigg|_{z=d} = -\frac{\mu_0^2 \pi^2 a^8 N^4 \alpha^2 t}{4R}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^6}\bigg|_{z=d} = +\frac{3\mu_0^2 \pi^2 a^8 N^4 \alpha^2 t}{2Rd^7}$$

Per $t = 3\,\mathrm{s}$, vale

$$F_z(t = 3\,\mathrm{s}) = 8.4 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N}$$

c)

Quando il secondo avvolgimento è ruotato a 90° dall'asse $\hat{z}$, il flusso del campo magnetico attraverso di esso è nullo. Quindi la corrente I_2 è nulla e $m_2 = 0$. In questo caso sia il momento meccanico che la forza sono nulle.

d)

Il campo elettrico indotto è tangente alla circonferenza, in verso antiorario. Dalla III equazione di Maxwell in forma integrale:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

quindi

$$2\pi a E_t = -\pi a^2 \frac{dB_z}{dt} \implies E_t = -\frac{a}{2}\frac{dB_z}{dt}$$

Il campo generato dal secondo avvolgimento non varia nel tempo, quindi consideriamo solamente il campo generato dal primo avvolgimento:

$$B_z = \frac{\mu_0 a^2 N I_1}{2(d/2)^3} = \frac{4\mu_0 a^2 N}{d^3}\alpha t$$

Si ha quindi

$$E_t = -\frac{2\mu_0 a^3 N}{d^3}\alpha = -5.0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{V/m}$$