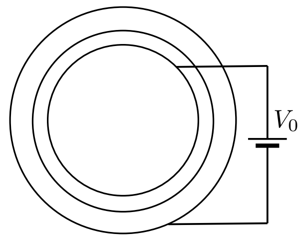
Prova Scritta Elettromagnetismo - 05.09.2019

(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Un sistema elettrostatico è costituito da tre sottili gusci conduttori di raggi $a = 10\,\mathrm{cm}$, $b = 12\,\mathrm{cm}$, $c = 15\,\mathrm{cm}$, concentrici, disposti come in figura.



Tra il guscio a e il guscio c è mantenuta una differenza di potenziale $V_0 = 250\,\mathrm{V}$.

a) Si ricavi la capacità elettrostatica C del sistema, la carica Q_a sul guscio a, e il campo elettrico E_a sulla superficie del conduttore a;

b) potendo variare il raggio a, sempre minore di b, si calcoli il valore di a per cui l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema è massima, e il valore di tale energia U_{max};

c) potendo variare il raggio a, si calcoli il valore di a per cui il campo elettrico sulla superficie di a ha un estremo (massimo o minimo), calcolare il valore di tale campo E_{m}, e valutare se si tratta di un minimo o un massimo dal confronto con quanto calcolato al punto (a).

Esercizio 2

Un disco di massa $m = 0.5$ kg, raggio $b = 50$ cm e altezza $h = 2$ cm è in rotazione solidale con un asse conduttore di raggio $a = 1.0$ cm e di momento d'inerzia trascurabile che lo attraversa. All'asse è connesso un motore che gli applica un momento meccanico costante $M = 5$ N·m. Mentre l'asse gira, su di esso agisce anche un momento di attrito $M_\gamma = -\gamma\omega$ con ω la velocità angolare e $\gamma = 0.2$ N·m·s.

L'asse è conduttore mentre il disco ha il bordo metallizzato (conduttore) ed è composto da un materiale di resistività $\rho = 0.1\,\Omega$·m. Il disco è posto in un campo $B = 1.8$ T, costante e uniforme, parallelo all'asse. Al tempo $t = 0$ il bordo del disco viene connesso con l'asse chiudendo il circuito come in figura.

Si trovi:

a) la velocità angolare ω_0 per $t < 0$;

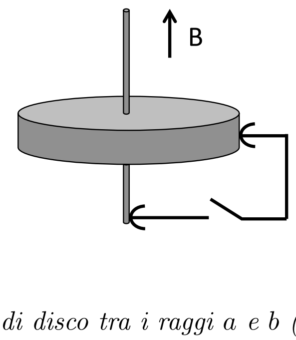
b) la resistenza R tra l'asse e il bordo del disco.

Trascurando l'autoinduzione si determini per $t \geq 0$:

c) il campo elettrico indotto all'interno del disco e la f.e.m. tra l'asse e il bordo del disco in funzione della velocità angolare;

d) l'equazione del moto del disco;

e) la velocità angolare del disco e la corrente che lo attraversa in funzione del tempo dandone la costante di tempo che ne regola la variazione e i loro valori asintotici.



Si indichi con I_d il momento d'inerzia della parte di disco tra i raggi a e b ($I_d = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2)$).

Soluzione 1

a)
Sul conduttore a si dispone una carica Q_a;
sulla superficie interna del conduttore b si dispone la carica $-Q_a$;
sulla superficie esterna del conduttore b si dispone la carica Q_a;
sulla superficie interna del conduttore c si dispone la carica $-Q_a$;
sulla superficie esterna del conduttore c non si ha carica.
Per il teorema di Gauss, il campo elettrico (radiale) tra il conduttore a e c vale sempre

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_a}{r^2}$$

e la differenza di potenziale tra a e c

$$V_0 = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$$

indipendente dal valore b. La capacità vale quindi

$$C = \frac{Q_a}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ac}{c-a} = 33\,\mathrm{pF}$$

La carica sul conduttore a vale

$$Q_a = CV_0 = 8.3\,\mathrm{nC}$$

e il modulo campo elettrico vale

$$E_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_a}{a^2} = \frac{CV_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{ac}{c-a}\right)\frac{V_0}{a^2} = \left(\frac{c}{c-a}\right)\frac{V_0}{a} = 7500\,\mathrm{V/m}.$$

b)
Per comodità sostituiamo al raggio a l'incognita r. L'energia elettrostatica vale

$$U = \frac{1}{2}CV_0^2 = 2\pi\varepsilon_0\frac{cr}{c-r}V_0^2.$$

La sua derivata vale

$$\frac{dU}{dr} = \frac{c^2}{(c-r)^2} \geq 0$$

e si tratta di una funzione crescente nell'intervallo $[0, b]$, quindi la massima energia elettrostatica si ha per $r = b$, e vale

$$U_{\max} = 2\pi\varepsilon_0\frac{cb}{c-b}V_0^2 = 2.1\,\mu\mathrm{J}$$

c)
Sostituendo $r = a$, il campo elettrico ricavato al punto (a) vale

$$E_r = \left(\frac{c}{c-r}\right)\frac{V_0}{r} = \frac{V_0 c}{cr - r^2}.$$

La sua derivata vale

$$\frac{dE_r}{dr} = -V_0 c\frac{c-2r}{cr-r^2}$$

che si annulla per

$$r = r_m = \frac{c}{2} = 7.5\,\mathrm{cm}.$$

Il campo elettrico vale quindi

$$E_m = \frac{V_0 c}{cr_m - r_m^2} = \frac{V_0 c}{\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4}} = \frac{4V_0}{c} = 6700\,\mathrm{V/m}.$$

Essendo tale valore inferiore al campo ricavato al punto (a), deduciamo che si tratta di un punto di minimo, senza bisogno di calcolare la derivata.

Soluzione 2
a) Per la velocità angolare per $t < 0$ si trova:

$$I_d \frac{d\omega}{dt} = M - \gamma\omega = 0 \qquad \omega_0 = \frac{M}{\gamma} = 25\,\mathrm{rad/s}$$

b) la resistenza del disco tra centro e bordo si ricava facilmente dalla seconda legge di Ohm:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

scomponendo il disco in una serie di resistenze a forma di anelli di area $S = 2\pi r h$, e spessi radialmente $l = dr$, si trova:

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi r h} = \frac{\rho}{2\pi h} \log \frac{b}{a} = 3.11\,\Omega$$

c) Quando il disco ruota con velocità angolare ω, all'interno del disco è presente un campo elettrico indotto radiale:

$$E_i = \omega r B \qquad\qquad \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times B = B\omega\vec{r}$$

e tra asse e disco è presente una f.e.m.:

$$f = \int_a^b B\omega r dr = \frac{1}{2} B(b^2 - a^2)\ \omega$$

d) Per $t > 0$ tra l'asse e il bordo del disco inizia a passare una corrente:

$$i = \frac{f}{R} = \frac{1}{2} \frac{B(b^2 - a^2)\ \omega}{R}$$

Sulla corrente che passa agisce una forza di Lorentz che viene trasferita da questa al disco.
Per un anello tra r e $r + dr$ questa è:

$$d\vec{F} = i d\vec{r} \times \vec{B} = -iB\ dr\ \hat{\varphi}$$

e il momento applicato all'asse risulta:

$$d\vec{M}_i = \vec{r} \times d\vec{F} = -iBrdr\hat{z}$$

$$\vec{M}_i = \int_a^b -iBr\ dr\ \hat{z} = -\frac{1}{2} iB(b^2 - a^2)\ \hat{z} = -\frac{1}{4} \frac{B^2(b^2 - a^2)^2}{R} \omega\ \hat{z}$$

In modo più dettagliato si può procedere come segue: su ogni elemento a distanza r dal centro del disco in rotazione è presente una forza $d\vec{F}$:

$$d\vec{F} = \vec{J} dS dr \times \vec{B} = \vec{J}\ hrd\varphi\ dr \times \vec{B} = -JB\ hrd\varphi\ dr\ \hat{\varphi} \qquad \text{con} \qquad J = \frac{i}{2\pi r h}$$

al quale corrisponde un momento meccanico rispetto all'asse:

$$d\vec{M}_i = -\ \vec{r} \times JB\ hrd\varphi\ dr\ \hat{\varphi} = -J\ hr^2 \vec{B} d\varphi\ dr = -\frac{i}{2\pi}\ r\vec{B}\ d\varphi\ dr$$

$$\vec{M}_i = \int_0^{2\pi} \int_a^b d\vec{M} = -i(b^2 - a^2)\vec{B} = -\frac{1}{4} \frac{B^2(b^2 - a^2)^2}{R} \omega\ \hat{z}$$

L'equazione del moto del disco è quindi:

$$I_d \frac{d\omega}{dt} = M - \gamma\omega - \frac{1}{4} \frac{B^2(b^2 - a^2)^2}{R} \omega$$

e) Riscrivendo l'equazione in modo semplificato come:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha - \beta\omega \qquad \alpha = \frac{M}{I_d} \qquad \beta = \frac{1}{I_d} \left(\gamma + \frac{1}{4} \frac{B^2(b^2 - a^2)^2}{R} \right)$$

e integrando, si ottiene:

$$\omega(t) = \omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty)\ e^{-\beta t} \qquad \omega_\infty = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{M}{\left(\gamma + \frac{1}{4} \frac{B^2(b^2 - a^2)^2}{R} \right)} \qquad \omega_0 = \frac{M}{\gamma} > \omega_\infty$$

quindi la velocità angolare diminuisce esponenzialmente da ω_0 a $\omega_\infty = 23.12\,\mathrm{rad/s}$ con costante di tempo $\tau = 1/\beta = 0.29$ s. Da questa si ricava l'andamento della corrente i usando la formula trovata sopra:

$$i = \frac{f}{R} = \frac{1}{2}\frac{B(b^2 - a^2)}{R}\,\omega = \frac{1}{2}\frac{B(b^2 - a^2)}{R}\,\left[\omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty)\; e^{-\beta t}\right]$$

con $i_\infty = 1.67$ A.