Prova Scritta Elettromagnetismo - 5.11.2018

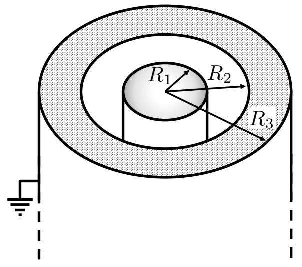
(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

---

risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

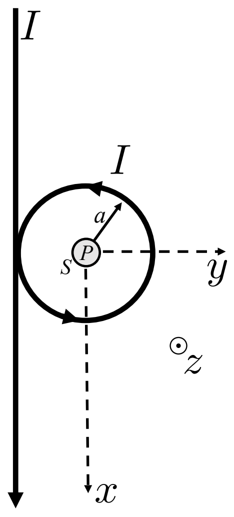
Un cilindro di raggio $R_1 = 2$ m, e di lunghezza $L \gg R_1$, è composto da materiale isolante di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$. Al suo interno è distribuita una carica (non di polarizzazione) con densità di volume $\rho = c\,r^2$, con $c = 6\ \mu\mathrm{C/m^5}$ e r la distanza in metri dall'asse del cilindro.



Il cilindro è circondato da un conduttore cilindrico cavo di raggio interno $R_2 = 4\,\mathrm{m}$ e raggio esterno $R_3 = 6\,\mathrm{m}$ connesso a massa. Nello spazio tra i due solidi c'è il vuoto. Si determini:

a) il campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del sistema;
b) la carica totale per unità di lunghezza sul conduttore esterno;
c) le densità delle cariche di polarizzazione;
d) il potenziale sull'asse del sistema cilindrico rispetto a massa.

Esercizio 2



Un filo conduttore di lunghezza infinita ha andamento rettilineo, e forma inoltre un occhiello circolare di raggio $a = 1.0$ cm, sul piano x, y, come mostrato in figura. Il filo è percorso da una corrente continua di intensità $I_0 = 1.0\,\mathrm{A}$. Determinare:

a) l'espressione del campo magnetico in ogni punto dell'asse z passante per il centro dell'occhiello e perpendicolare al piano del foglio, e calcolarne il valore nel punto P ad un'altezza $h = 1.0$ cm al di sopra del centro dell'occhiello;
b) il valore della forza agente su una carica puntiforme $q = 30\ \mu\mathrm{C}$ quando transita per il punto P con velocità verticale (in direzione asse z, verso positivo) $v = 300$ m/s.

Se ora il filo viene alimentato con una corrente variabile nel tempo di intensità $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, con $\omega = 1000.0$ rad/s, determinare:

c) l'espressione della corrente indotta in una piccola spira circolare di area $S = 1.0\ \mathrm{mm}^2$ e resistenza elettrica $R = 3.0\ \Omega$, parallela al piano della figura, con centro il punto P;
d) il valore della carica elettrica che attraversa la piccola spira circolare durante il semi-periodo positivo di oscillazione della corrente.

Soluzione
Esercizio 1
a)
Per la simmetria cilindrica del sistema, il vettore induzione elettrica ha solo la componente radiale non nulla.
All'interno del cilindro ($r \leq R_1$) per il teorema di Gauss:

$$\Phi(\vec{D}(r)) = Q(r) \tag{1}$$

che possiamo riferire alla lunghezza unitaria del cilindro. $Q(r)$ è la carica contenuta in un cilindro di raggio r e lunghezza unitaria:

$$Q(r) = \int_0^r \rho(r)\, 2\pi r\, dr = \int_0^r cr^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi c}{2} r^4$$

Dalla (1) segue:

$$2\pi r\, D = \frac{2\pi c}{4} r^4 \qquad D = \frac{1}{4} c\, r^3 \qquad E(r) = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{4\epsilon_0\epsilon_r} c\, r^3$$

Allo stesso risultato si arriva facilmente anche dalla prima equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho(r)$ scritta in coordinate cilindriche.

Per $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$\Phi(\vec{D}_0(r)) = Q(R_1) \qquad 2\pi r\, D_0 = \frac{2\pi c}{4} R_1^4 \qquad D_0 = \frac{c\, R_1^4}{4} \frac{1}{r} \qquad E_0 = \frac{c\, R_1^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

All'interno dell'involucro cilindrico conduttore per $R_2 \leq r \leq R_3$ il campo elettrico è nullo. Il campo è poi chiaramente nullo per $r > R_3$.

b)
Dal teorema di Gauss su una superficie cilindrica di raggio r tale che $R_2 < r < R_3$, dove il campo D è nullo, si trova la carica Q_2 per unità di lunghezza sulla superficie di raggio R_2:

$$\Phi(D) = Q(R_1) + Q_2 = 0 \qquad Q_2 = -Q(R_1) = -\frac{\pi c}{2} R_1^4 = -\,1.51 \cdot 10^{-4}\ \text{C/m}$$

c)
Per $r \leq R_1$ il vettore intensità di polarizzazione P è:

$$P = \chi\epsilon_0\, E = \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r}\, c\, r^3$$

e la densità di carica di polarizzazione di volume:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rP) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\, c\, r^2 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\, \rho$$

La carica di polarizzazione sulla superficie di raggio R_1 ha densità:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r}\, c\, R_1^3 = 9.0\, \mu\text{C/m}^2$$

La carica di polarizzazione di volume (per unità di lunghezza) è:

$$Q_{PV} = \int_0^{R_1} \rho_p\, 2\pi r\, dr = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\pi c}{2} R_1^4 = -1.13 \cdot 10^{-4}\ \text{C/m}$$

e quella di superficie deve essere opposta a quella di volume:

$$Q_{PS} = 2\pi R_1\, \sigma_P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\pi c}{2} R_1^4 = -Q_{PV} = 1.13 \cdot 10^{-4}\ \text{C/m}$$

d)
Per il calcolo del potenziale V_a sull'asse del cilindro possiamo scrivere:

$$V_a - V_{R_1} = \int_0^{R_1} E(r)\, dr = \frac{c}{4\epsilon_0\epsilon_r} \frac{R_1^4}{4}$$

$$V_{R_1} - V_{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} E_0 \, dr = \frac{c}{4\epsilon_0} R_1^4 \, \log \frac{R_2}{R_1}$$

$$V_a = \frac{c}{4\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{R_1^4}{4} + \frac{c}{4\epsilon_0} R_1^4 \, \log \frac{R_2}{R_1} = \frac{c R_1^4}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{4\epsilon_r} + \log \frac{R_2}{R_1} \right) = 2.11 \cdot 10^6 \text{ V}$$

essendo $V(R_2) = 0$.

Esercizio 2

a)

Il campo è dato dalla sovrapposizione del campo generato da un filo rettilineo in un punto a distanza $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ dall'asse del filo, e da quello generato dalla spira lungo il suo asse ad una distanza h dal suo centro:

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_{\text{filo}}(z) &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0}{r}\hat{t} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{\hat{x}\times\vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{1}{a^2+z^2}(-z\hat{y} + a\hat{z});\\
\vec{B}_{\text{anello}}(z) &= \frac{\mu_0}{2}\frac{I_0 a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z};\\
B(P) &= \sqrt{(B_{\text{filo},z}(h) + B_{\text{anello},z}(h))^2 + (B_{\text{filo},y}(h))^2)} = 32\,\text{nT}.
\end{aligned}
$$

b)

La particella esperimenta la forza di Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, la componente di B parallela all'asse z non fornisce contributo, la componente perpendicolare si, per cui:

$$
F = qvB_{filo,y}(h) = qv\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{h}{a^2+h^2} = 9.0\cdot 10^{-8}\,\text{N}
$$

diretta nella direzione delle x positive.

c)

La forza elettromotrice indotta nella piccola spira è data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$
\begin{aligned}
fem &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}((B_{\text{anello},z}S) + B_{\text{filo},z}S) = -\mu_0 I_0 S\omega\cos(\omega t)\left(\frac{a}{2\pi(a^2+h^2)} + \frac{a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\right);\\
i &= \frac{fem}{R}.
\end{aligned}
$$

d)

La carica elettrica che attraversa il filo è data dalla legge di Felici, e risulta nulla essendo la corrente $I(t)$, e quindi il flusso, iniziale ($t = 0$) e finale ($t = T/2 = \pi/\omega$) nulla:

$$
Q = \frac{1}{R}(\Phi_i - \Phi_f) = 0\,\text{C}.
$$

Il risultato cambia se si fa riferimento al semiperiodo positivo della corrente indotta. In tal caso il risultato cambia e la carica trovata integrando la corrente positiva non è nulla.