

Prova Scritta di Elettromagnetismo - 17.07.2020

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Per recuperare la prima prova di esonero, risolvere il primo esercizio in 1 ora e 30 minuti.

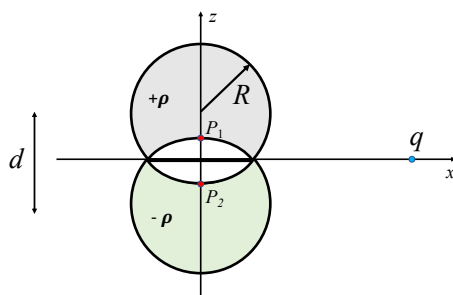
Per recuperare la seconda prova di esonero, risolvere il secondo esercizio in 1 ora e 30 minuti.

Esercizio 1

Due sfere identiche di raggio $R = 8.5$ cm sono uniformemente cariche con densità di carica opposta $\pm\rho = \pm 2.5 \times 10^{-6}$ C/m³, e sono compenstrate come in figura in modo tale che nella regione di sovrapposizione tra le due sfere vi sia una densità di carica nulla. I centri delle sfere si trovano sull'asse \hat{z} simmetricamente all'origine e distano $d = 12$ cm tra loro. La sfera centrata nella parte positiva dell'asse \hat{z} è carica positivamente e l'altra negativamente. Si determini:

- l'andamento del campo elettrico \vec{E} nei punti dell'asse \hat{x} in funzione di x , specificandone i valori numerici nell'origine, e per $x = R$;
- il campo elettrico nella regione di sovrapposizione tra le due sfere (in cui $\rho = 0$);
- la velocità v con cui un protone lasciato libero da fermo nel punto P_1 raggiunge il punto P_2 ;
- il momento di dipolo \vec{p} del sistema;
- la forza F che il sistema esercita su una carica $q = 5.0$ μC posta sull'asse \hat{x} , di coordinata $x = 20$ cm, calcolandola sia in approssimazione di dipolo che con calcolo esatto.

Si ricorda che per il protone $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg e $q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C.

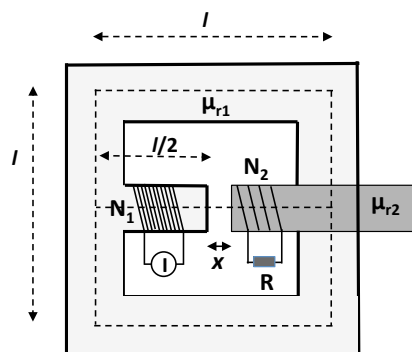


Esercizio 2

Il circuito magnetico in figura è composto da una parte con permeabilità magnetica relativa $\mu_{r1} = 200$, da un pistone di permeabilità magnetica relativa $\mu_{r2} = 400$ e da un traferro come in figura. Ogni lato del circuito ha lunghezza $l = 20$ cm e la sezione è quadrata di superficie $S = 16$ cm². Su una espansione polare, di lunghezza $l/2$, sono avvolte $N_1 = 100$ spire connesse a un generatore che eroga una corrente costante $I = 5$ A. Il pistone, inizialmente tenuto fermo, può scorrere senza attrito verso l'espansione polare. Si indica con x la lunghezza del traferro.

Nell'approssimazione di circuito magnetico, si calcoli in funzione di x , dandone i valori per $x = 3$ cm:

- la riluttanza magnetica \mathcal{R} del circuito;
- il campo B nel traferro supposto di piccolo spessore;
- l'energia magnetica U_m del sistema;
- la forza F agente sul pistone.
- Si calcoli infine la carica Q che scorre in un avvolgimento di $N_2 = 20$ spire, con resistenza $R = 10$ Ω , avvolto sul pistone se questo, lasciato libero dalla posizione con $x = 3$ cm, raggiunge l'espansione polare con l'avvolgimento percorso dalla corrente costante $I = 5$ A.



Soluzione 1

a)

Per ragioni di simmetria il campo sull'asse \hat{x} ha solo la componente E_z . Possiamo calcolare il campo come la sovrapposizione del campo E_1 generato da una sfera carica positivamente, posta in $z = d/2$, e del campo E_2 generato da una sfera carica negativamente, posta in $z = -d/2$. Per il teorema di Gauss una sfera uniformemente carica centrata nel punto \vec{r}_c genera un campo diverso all'interno e all'esterno. Si ha:

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}_c)$$

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_c}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3}$$

Nel nostro caso abbiamo due sfere di densità opposta, centrate nei punti $\vec{r}_{c,+} = (0, 0, d/2)$ e $\vec{r}_{c,-} = (0, 0, -d/2)$, mentre i punti dell'asse \hat{x} sono identificati dal vettore $\vec{r} = (x, 0, 0)$. Sull'asse x , per simmetria, le componenti x e y si annullano quando si sommano i campi delle due sfere. Le componenti z , sempre sull'asse \hat{x} , sono invece concordi. Per la sfera positiva si ha:

$$E_{1,z} = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(0 - \frac{d}{2}\right) & = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{d}{2}, & \text{se } |x| < \sqrt{R^2 - d^2/4} \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{0 - d/2}{(x^2 + (d/2)^2)^{3/2}} & = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{d/2}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove i punti interni sono individuati dalla condizione $x^2 + (d/2)^2 < R^2$. Per la sfera negativa si ha

$$E_{2,z} = \begin{cases} -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(0 + \frac{d}{2}\right) & = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{d}{2}, & \text{se } |x| < \sqrt{R^2 - d^2/4} \\ -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{0 + d/2}{(x^2 + (d/2)^2)^{3/2}} & = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{d/2}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le componenti sono quindi uguali e concordi, e la componente z totale vale

$$E_z = \begin{cases} -\frac{\rho}{3\epsilon_0} d, & \text{se } |x| < \sqrt{R^2 - d^2/4} \\ -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per i punti indicati, il campo vale

$$E_z(x=0) = -11.3 \text{ kV/m}$$

$$E_z(x=R) = -6.16 \text{ kV/m}$$

b)

Nella regione di sovrapposizione tra le due sfere il campo è uniforme. Infatti può essere calcolato come la sovrapposizione del campo dentro una sfera carica positivamente centrata in $\vec{r}_{c,+} = (0, 0, d/2)$ e il campo dentro una sfera carica negativamente centrata in $\vec{r}_{c,-} = -\vec{r}_{c,+}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}_{c,+}) - \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}_{c,-}) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{d}$$

Dove abbiamo definito il vettore $\vec{d} = \vec{r}_{c,+} - \vec{r}_{c,-}$.

È presente la sola componente z :

$$E_z = -\frac{\rho d}{3\epsilon_0} = -11.3 \text{ kV/m}$$

c)

Considerato che il campo elettrico è uniforme, il protone segue un moto uniformemente accelerato, con accelerazione verso il basso

$$a = \frac{F}{m_p} = \frac{q_p E}{m_p}$$

La distanza tra i punti P_1 e P_2 vale

$$\Delta z = \left(-\frac{d}{2} + R\right) - \left(\frac{d}{2} - R\right) = 2R - d = 5 \text{ cm}$$

e quindi

$$v = \sqrt{2a\Delta z} = \sqrt{\frac{2q_p E}{m_p} (2R - d)} = 3.3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

d)

Il momento di dipolo è calcolabile come la sovrapposizione di sfera carica positivamente $Q = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$ e una negativamente $-Q$, poste a distanza d

$$\vec{p} = Qd\hat{z} = \frac{4\pi}{3}R^3\rho d\hat{z}$$

con

$$p = \frac{4\pi}{3}R^3\rho d = 7.7 \times 10^{-10} \text{ Cm}$$

Più esplicitamente, possiamo calcolare il momento di dipolo come

$$\vec{p} = \int_{\tau} \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau'$$

Considerando il sistema come la somma di due sfere di segni opposti, possiamo scomporre nella somma di due integrali sulla sfera negativa τ_- e sulla sfera positiva τ_+ :

$$\vec{p} = \int_{\tau_-} -\rho \vec{r}' d\tau' + \int_{\tau_+} \rho \vec{r}'' d\tau''$$

Possiamo integrare solo sulla sfera negativa τ_- , tenendo conto del fatto che i punti della sfera positiva hanno coordinate $\vec{r}'' = \vec{r}' + \vec{d}$. Si ha quindi:

$$\vec{p} = \int_{\tau_-} -\rho \vec{r}' d\tau' + \int_{\tau_-} \rho (\vec{r}' + \vec{d}) d\tau' = \int_{\tau_-} \rho \vec{d} d\tau' = \left(\int_{\tau_-} \rho d\tau' \right) \vec{d} = Q\vec{d}$$

e)

La forza è legata al campo da

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Il calcolo esatto è dato dalla formula al punto (a). La forza ha solo componente z e vale

$$F_z = qE_z = -q \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} = -3.8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

mentre in approssimazione di dipolo, vale

$$F_{z,\text{dipolo}} = qE_{z,\text{dipolo}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} = -q \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{d}{x^3} = -4.3 \times 10^{-3} \text{ N}$$

con un errore del 13%.

Soluzione 2

a)

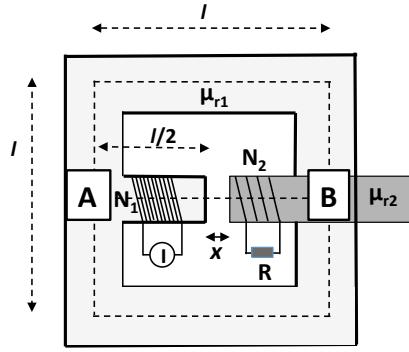
La riluttanza del circuito è data dalla riluttanza \mathcal{R}_{AB} degli elementi nel ramo tra i punti A e B in figura, in serie al parallelo \mathcal{R}_P dei due rami uguali esterni.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{AB} &= \frac{1}{\mu_0\mu_{r1}S} \frac{l}{2} + \frac{x}{\mu_0 S} + \frac{1}{\mu_0\mu_{r2}S} \left(\frac{l}{2} - x \right) \\ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 &= \frac{2l}{\mu_0\mu_{r1}S} \quad \frac{1}{\mathcal{R}_P} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{2}{\mathcal{R}_1} \quad \mathcal{R}_P = \frac{l}{\mu_0\mu_{r1}S} \\ \mathcal{R}_{tot} = \mathcal{R}_P + \mathcal{R}_{AB} &= \frac{l}{\mu_0\mu_{r1}S} + \frac{1}{\mu_0\mu_{r1}S} \frac{l}{2} + \frac{x}{\mu_0 S} + \frac{1}{\mu_0\mu_{r2}S} \left(\frac{l}{2} - x \right) = \\ \mathcal{R}_{tot} &= \frac{1}{\mu_0 S} \left[\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} + \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} x \right] = 1.58 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \end{aligned}$$

Poiché μ_{r1} e μ_{r2} sono grandi questa si può approssimare:

$$\mathcal{R}_{tot} \simeq \frac{x}{\mu_0 S} = 1.49 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1}$$

ed è così evidente che il valore della riluttanza è determinata quasi interamente dal piccolo traferro.



b)

Dalla legge di Hopkinson:

$$N_1 I = \mathcal{R}_{tot} \Phi \quad \Phi = BS$$

$$B = \frac{1}{S} \frac{N_1 I}{\mathcal{R}_{tot}} = \frac{N_1 I}{\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} + \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} x \right]} = 1.98 \cdot 10^{-2} \text{ T} \quad B \simeq \frac{\mu_0 N_1 I}{x} = 2.09 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

c)

Indicando con $\Phi_{N_1} = N_1 \Phi$ il flusso concatenato con gli N_1 avvolgimenti della bobina, l'energia magnetica del circuito è:

$$U_m = \frac{1}{2} \Phi_{N_1} I = \frac{1}{2} N_1 \Phi I = \frac{1}{2} \frac{N_1^2 I^2}{\mathcal{R}_{tot}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S N_1^2 I^2}{\left[\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} + \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} x \right]} = 7.93 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$U_m \simeq \frac{1}{2} \mu_0 S \frac{N_1^2 I^2}{x} = 8.38 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Anche da:

$$L = \frac{\Phi_{N_1}}{I} = \frac{N_1 \Phi}{I} \quad U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi_{N_1} I$$

o dall'integrale della densità di energia magnetica integrata sul volume del circuito.

d)

La forza agente sul pistone è:

$$F_m = \frac{dU_m}{dx} \Big|_I = -\frac{1}{2} \frac{N_1^2 I^2}{\mathcal{R}_{tot}^2} \frac{d\mathcal{R}_{tot}}{dx} \Big|_I = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0 S N_1^2 I^2}{\left[\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} + \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} x \right]^2} \left(\frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} \right) = -0.25 \text{ N}$$

$$F_m \simeq -\frac{1}{2} \frac{\mu_0 S N_1^2 I^2}{x^2} = -0.28 \text{ N}$$

e)

La carica totale passata nel circuito si può trovare, usando la legge di Felici, dalla variazione del flusso di B concatenato con gli N_2 avvolgimenti della seconda bobina:

$$Q = \frac{N_2 \Phi(x_{in} = 3 \text{ cm}) - N_2 \Phi(x = 0)}{R}$$

$$Q = \frac{\mu_0 S N_1 N_2 I}{R} \left[\frac{1}{\left(\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} + \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} x \right)} - \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} \right)} \right] =$$

$$Q = -\frac{\mu_0 S N_1 N_2 I}{R} \left[\frac{1}{\left(\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} + \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} x \right)} \left(\frac{3}{2} \frac{l}{\mu_{r1}} + \frac{1}{2} \frac{l}{\mu_{r2}} \right) \right] \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2}} x = -1.09 \text{ mC}$$

$$Q \simeq -\frac{2\mu_0 S N_1 N_2 I}{Rl} \frac{\mu_{r1}\mu_{r2}}{3\mu_{r2} + \mu_{r1}} = -1.15 \text{ mC}$$

(il segno è negativo se le N_2 hanno lo stesso orientamento delle N_1 spire.)

Si osservi che il flusso del campo B iniziale è pari a $3.17 \cdot 10^{-5}$ Wb mentre quello finale è $57.4 \cdot 10^{-5}$ Wb a causa della notevole diminuzione della riluttanza magnetica del circuito in assenza di traferro.