Prova Scritta Elettromagnetismo - 07.05.2021

(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Due fili indefiniti uniformemente carichi con densità di carica lineare $\lambda = 2.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C/m}$, sono paralleli e posti a distanza $d = 10\,\mathrm{cm}$. Si consideri un piano orizzontale, ortogonale ai due fili, e su questo piano un sistema di assi cartesiani come in figura.

a) Si determini il campo elettrico sui punti dell'asse x tra -$d/2$ e $d/2$.

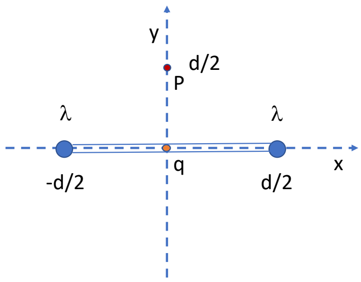
b) Si determini il campo elettrico sui punti dell'asse y.

Un corpo carico di massa $m = 5.0\,\mathrm{g}$ e carica $q = 3.0 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ viene posto nell'origine del sistema di riferimento. In un primo tempo il corpo è vincolato a muoversi su una guida posta lungo l'asse x tra i due fili. In questa configurazione supponiamo di spostarlo di una quantità $\delta x \ll d$ dall'origine.

c) Si determini il periodo delle piccole oscillazioni del moto del corpo, calcolandone anche il valore numerico.

Successivamente la guida viene rimossa. Il corpo viene spostato dall'origine, di una quantità δy molto piccola nella direzione delle y positive.

d) Si determini con che velocità il corpo raggiunge il punto P di coordinate $x = 0$, $y = d/2$, calcolandone il valore numerico. Si trascuri la forza di gravità.



Esercizio 2

Una spira rettangolare di lati a e b, di resistenza R e coefficiente di autoinduzione trascurabile, si trova in prossimità di un filo rettilineo indefinito percorso da corrente costante I_f. La spira viene mantenuta in moto con velocità costante v nella direzione indicata in figura. Indicando con x la coordinata del lato della spira più vicino al filo (vedi figura), e con x_0 il valore iniziale (per $t = 0$) di tale coordinata, si determini:

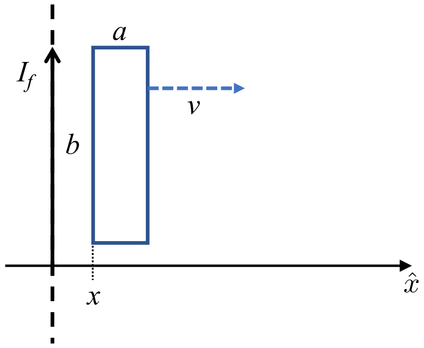
a) il coefficiente di mutua induzione fra spira e filo (in funzione di x);

b) la corrente che circola nella spira (come funzione del tempo), indicandone il verso di percorrenza, e calcolandone il valore numerico al tempo t_1;

c) la forza (come funzione del tempo) che è necessario applicare alla spira al fine di mantenerne il moto a velocità costante, specificandone il valore numerico al tempo t_1;

d) la potenza dissipata nella spira in funzione del tempo, e il valore numerico al tempo t_1.

(dati: $a = 1.5\,\mathrm{cm}$, $b = 8.0\,\mathrm{cm}$, $I_f = 12\,\mathrm{A}$, $R = 100\,\Omega$, $v = 8.0\,\mathrm{m/s}$, $x_0 = 0.5\,\mathrm{cm}$, $t_1 = 3.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$)



Soluzione 1

a) Ciascuno dei due fili indefiniti produce un campo elettrico radiale unicamente dipendente dalla distanza r dal filo:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$$

Lungo l'asse x il campo sarà dunque diretto come x. Calcoliamo il valore del campo $E(x)$ dalla composizione dei campi dovuti ai due fili:

$$E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d/2+x} - \frac{1}{d/2-x}\right) = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{x}{d^2/4-x^2}$$

Si tratta, come si vede di un campo negativo per x positivi (e pertanto diretto verso il filo in $-d/2$) e positivo per x negativi (e pertanto diretto verso il filo in $d/2$). Si tratta pertanto di un campo convergente verso la posizione $x = 0$.

b) Per ogni punto sull'asse y occorre sommare le proiezioni sull'asse y dei campi dovuti ai due fili. Per simmetria i campi sono uguali e nella somma l'unica componente che rimane è quella lungo y, la componente ortogonale a y annullandosi per motivi di simmetria.

$$E(y) = \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{d^2/4+y^2}}\frac{y}{\sqrt{d^2/4+y^2}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{y}{d^2/4+y^2}$$

In questo caso il campo risulta diretto verso le y positive pe.r $y > 0$ e verso le y negative per $y < 0$. Si tratta dunque di un campo divergente dalla posizione $y = 0$.

c) La forza che agisce sul corpo carico nel momento in cui lo poniamo nella posizione $x = \delta x$, $y = 0$ è diretta lungo x ed il suo modulo è dato da:

$$F = qE(\delta x) = -\frac{\lambda q}{\pi\epsilon_0}\frac{\delta x}{d^2/4-\delta x^2} = -\frac{4\lambda q}{\pi\epsilon_0 d^2}\frac{\delta x}{1-4\delta x^2/d^2}$$

che possiamo sviluppare in serie se $\delta x << d$, ottenendo:

$$F \approx -\frac{4\lambda q}{\pi\epsilon_0 d^2}\delta x$$

L'equazione del moto dovuto ad una tale forza è data da:

$$m\ddot{\delta x} + \frac{4\lambda q}{\pi\epsilon_0 d^2}\delta x = 0$$

da cui deriviamo il periodo delle piccole oscillazioni:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 m d^2}{4\lambda q}} = 1.51s$$

d) Durante il moto lungo l'asse x deve conservarsi l'energia meccanica. Pertanto:

$$T_{in} + U_{in} = T_{fin} + U_{fin}$$

da cui, partendo il corpo da fermo, ricaviamo:

$$T_{fin} = U_{in} - U_{fin} = q\big(V(y=0) - V(y=d/2)\big)$$

Calcoliamo la differenza di potenziale tra i punti $y = 0$ e $y = d/2$.

$$\Delta V = \int_0^{d/2} E(y)dy = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\int_0^{d/2}\frac{y}{d^2/4+y^2}dy$$

Risolviamo l'integrale con la sostituzione $d^2/4 + y^2 = t$:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{d^2/4}^{d^2/2}\frac{dt}{t} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln 2$$

da cui l'energia cinetica e quindi la velocitá:

$$T_{fin} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln 2 \qquad (1)$$

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0}\ln 2} = 0.17m/s$$

Soluzione 2

a) Indichiamo con $\hat{n}$ la normale alla spira, uscente dal piano del foglio. Il campo di induzione magnetica prodotto dal filo vale

$$\vec{B}(x) = -\frac{\mu_0 I_f}{2\pi x}\hat{n}$$

Il flusso del campo magnetico attraverso la spira vale

$$\Phi(B) = -\frac{\mu_0 I_f b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

e il coefficiente di mutua induzione

$$M = \frac{\Phi(B)}{I_f} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

b) La forza elettromotrice nella spira vale

$$fem = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = +\frac{\mu_0 b I_f}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln \frac{x+a}{x}$$

con $x = x_0 + vt$. Si ha quindi

$$fem = \frac{\mu_0 b I_f}{2\pi} \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{x+a}{x} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 b I_f}{2\pi} \frac{x}{x+a} \frac{-a}{x^2} v = -\frac{\mu_0 a b I_f}{2\pi} \frac{v}{(x+a)x}$$

e la corrente nella spira vale

$$I = -\frac{\mu_0 a b I_f}{2\pi R} \frac{v}{(x+a)x}$$

Esplicitamente, in funzione del tempo

$$I(t) = -\frac{\mu_0 a b I_f}{2\pi R} \frac{v}{(x_0+vt+a)(x_0+vt)}$$

La corrente circola in verso orario in modo che il campo di induzione magnetica prodotto dalla corrente nella spira si opponga alla variazione del flusso di B ambiente. Al tempo t_1

$$I_1 = \frac{\mu_0 a b I_f}{2\pi R} \frac{v}{(x_0+vt_1+a)(x_0+vt_1)} = 1.8 \times 10^{-7}\,\mathrm{A}$$

c) La forza tra il filo e i tratti della spira ad esso ortogonale sono uguali e contrari, e il loro effetto si annulla. La forza tra il filo e i tratti della spira ad esso parallelo ha solo la componente x che vale:

$$F_x = \mp \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_f I b}{d}$$

dove d è la distanza del ramo della spira dal filo. La forza è attrattiva se le correnti sono concordi (ramo in x) e repulsiva se le correnti sono discordi (ramo in $x+a$). La forza totale vale quindi:

$$F_x = -\frac{\mu_0 I_f I b}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) = -\frac{\mu_0 I_f I b}{2\pi} \frac{a}{x(x+a)}$$

La forza da applicare per mantenere la spira in moto vale quindi

$$F_{\mathrm{ext},x} = \frac{\mu_0 I_f I b}{2\pi} \frac{a}{x(x+a)}$$

Sostituendo la corrente ricavata precedentemente, è possibile anche scrivere

$$F_{\mathrm{ext},x} = \left(\frac{\mu_0 a b I_f}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \frac{1}{(x(x+a))^2}$$

al tempo t_1, con $x_1 = x_0 + vt_1 = 2.9\,\mathrm{cm}$, si ha

$$F_{\mathrm{ext},x} = \left(\frac{\mu_0 a b I_f}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \frac{1}{(x_1(x_1+a))^2} = 4.1 \times 10^{-13}\,\mathrm{N}$$

d) La potenza può essere calcolata come

$$P(t) = RI(t)^2 = R \left(\frac{\mu_0 a b I_f}{2\pi R} \frac{v}{(x_0+vt+a)(x_0+vt)} \right)^2 = 3.3 \times 10^{-12}\,\mathrm{J}$$

oppure

$$P = F_{\mathrm{ext},x} v$$

ottenendo lo stesso risultato.