**Prova Scritta di Elettromagnetismo - 25.06.2021**

*(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)*

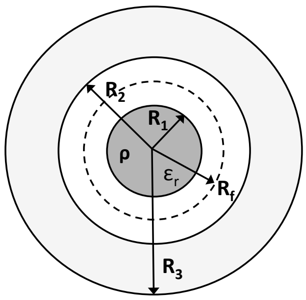
---

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.
Per recuperare la prima prova di esonero, risolvere il primo esercizio in 1 ora e 30 min.
Per recuperare la seconda prova di esonero, risolvere il secondo esercizio in 1 ora e 30 min.

---

**Esercizio 1**

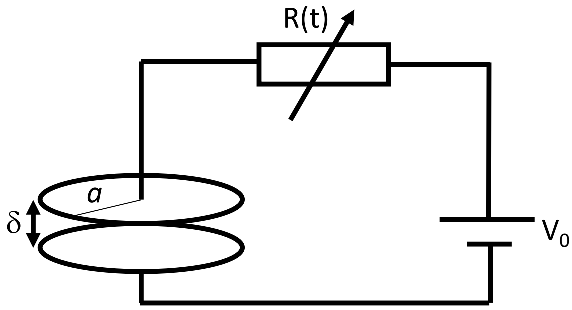
Un cilindro di materiale isolante, di lunghezza $L = 50$ cm, raggio $R_1 = 2.0$ cm e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.0$, ha depositata al suo interno una distribuzione di carica localizzata di densità $\rho = c\,r^2$, con $c = 6.0 \times 10^{-3}$ C/m$^5$ dove $r$ (in metri) è la distanza dall'asse del cilindro. Questo è circondato da uno strato cilindrico conduttore neutro, coassiale al cilindro, di lunghezza $L$ con raggi interno ed esterno $R_2 = 4.0$ cm e $R_3 = 6.0$ cm. Nello spazio tra il cilindro e lo strato c'è il vuoto. In figura è rappresentata una sezione del cilindro.
Trascurando gli effetti di bordo, si determinino, dandone i valori numerici:
a) il flusso del campo elettrico attraverso una superficie cilindrica di raggio $R_f = 3.0$ cm e lunghezza $L$ posta tra il cilindro interno e lo strato conduttore;
b) le densità di carica e le cariche sulle superfici dello strato conduttore;
c) l'espressione del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro dandone un grafico e i valori alle distanze $R_1,\ R_2$, e $R_3$ dall'asse;
d) le distribuzioni di cariche di polarizzazione presenti nel cilindro: densità e cariche sulla superficie e nel volume.




---

**Esercizio 2**

Un circuito è costituito da un generatore di differenza di potenziale costante pari a $V_0$=10 V, da un condensatore con armature piane e parallele di forma circolare di raggio $a$=5.0 cm e distanza tra le armature $\delta$=0.50 mm, e da una resistenza variabile che al tempo $t = 0$ è assimilabile ad un circuito aperto e che evolve nel tempo secondo la legge $R(t) = k/t$, dove $k = 1.0\,\mathrm{k\Omega\,s}$. Il condensatore è inizialmente scarico.
Si determini l'andamento temporale ed i valori asintotici delle seguenti grandezze:
a) la carica presente sulle armature del condensatore;
b) la corrente che percorre il circuito;
c) il campo elettrico all'interno del condensatore;
d) il campo magnetico in funzione del raggio all'interno del condensatore;
e) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del condensatore.
f) Si discuta infine il bilancio energetico del processo: si determini l'energia complessivamente erogata dal generatore $U_{\mathrm{gen}}$, quella dissipata nella resistenza $U_{\mathrm{diss}}$ e infine quella che va ad immagazzinarsi nel condensatore $U_{\mathrm{cond}}$.



**Soluzione 1**

**a)** Per il teorema di Gauss e la simmetria cilindrica del sistema, sappiamo che il flusso attraverso la superficie cilindrica di raggio $R_f$ è $\Phi = Q/\epsilon_0$ dove $Q$ è la carica racchiusa all'interno del cilindro di raggio $R_f$. La carica all'interno è:

$$Q = \int_0^{R_1} \rho\, 2\pi r\, L\, dr = \int_0^{R_1} c\, r^2\, 2\pi r\, L\, dr = 2\pi\, c\, L \int_0^{R_1} r^3\, dr = \frac{\pi}{2} c\, L\, R_1^4$$

$$Q = 7.54 \times 10^{-10}\ \mathrm{C} \qquad \Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = 85.2\ \mathrm{V \cdot m}$$

**b)** Sulla superficie a $r = R_2$ è indotta una carica $-Q$ (da teorema Gauss essendo nullo il campo dentro il conduttore) e quindi una carica $+Q$ è presente sulla superficie a $r = R_3$. Le densità di carica sono:

$$\sigma_2 = -\frac{Q}{2\pi\, R_2\, L} = -6.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2} \qquad \sigma_3 = \frac{Q}{2\pi\, R_3\, L} = 4.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$$

**c)**
- Per $r < R_1$
Iniziamo calcolando il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ che per la simmetria del sistema ha chiaramente non nulla solo la componente radiale.
L'equazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ in coordinate cilindriche si riduce all'equazione:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\, D_r) = cr^2 \qquad \frac{d}{dr}(r\, D_r) = cr^3$$

che integrata dà:

$$D_r = \frac{1}{4}\, cr^3$$

e quindi il campo elettrico per $r < R_1$ è:

$$E_r = \frac{1}{4\epsilon}\, cr^3 \qquad E_r(R_1^-) = 3.39 \times 10^2\ \mathrm{V/m}$$

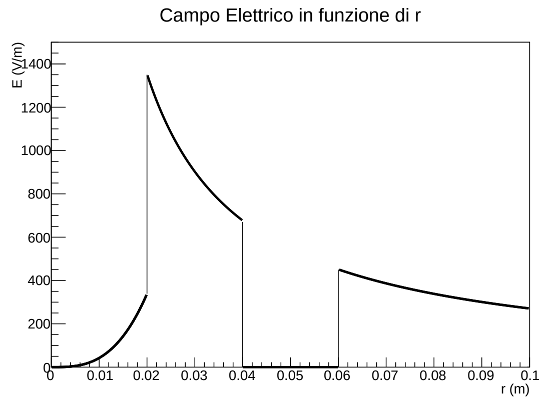
- per $R_1 < r < R_2$, siamo nel vuoto, usiamo il teorema di Gauss e l'espessione di $Q$ trovata al punto a):

$$2\,\pi\, r\, L\, E_r = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad E_r = \frac{c}{4\,\epsilon_0}\frac{R_1^4}{r}$$

$$E_r(R_1^+) = 1.36 \times 10^3\ \mathrm{V/m} \qquad E_r(R_2^-) = 6.78 \times 10^2\ \mathrm{V/m}$$

- per $R_2 < r < R_2$ siamo all'interno del conduttore quindi il campo è nullo.
- per $R_3 < r < \infty$ possiamo usare il flusso del vettore spostamento $\vec{D}$ o ricordarci che nel dielettrico la carica totale di polarizzazione è nulla e usare il flusso del campo elettrico $\vec{E}$:

$$2\,\pi\, r\, L\, E_r = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\pi}{2\,\epsilon_0}\, c\, L\, R_1^4 \qquad E_r = \frac{c}{4\,\epsilon_0}\frac{R_1^4}{r} \qquad E_r(R_3^+) = 4.52 \times 10^2\ \mathrm{V/m}$$



In figura è riportato l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza $r$ dall'asse del cilindro.

**d)**

Per $r < R_1$ il vettore intensità di polarizzazione è:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \, \chi \, \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \, \chi}{4\epsilon} \, cr^3 \, \hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r} \, cr^3 \, \hat{r}$$

Usando l'espressione della divergenza in coordinate cilindriche per la densità di carica di polarizzazione di volume si trova:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \, \frac{d}{dr} \, (r \, P_r) = -\frac{1}{r} \, \frac{d}{dr} \left( r \, \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r} \, cr^3 \right) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \, c \, r^2$$

$$\rho_P = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \, \rho$$

La densità di carica di polarizzazione di superficie a $r = R_1$ è:

$$\sigma_P = \vec{P}(R_2) \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r} \, c \, R_1^3 = 0.9 \times 10^{-10} \text{ C}/m^2$$

La carica totale di polarizzazione di volume è:

$$Q_{PV} = \int_0^{R_1} \rho_P \, 2\pi \, r \, L \, dr = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \; 2\pi c \, L \int_0^{R_1} r^2 \, r \, dr =$$

$$Q_{PV} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\pi}{2} \; c \, L \, R_1^4 = -5.65 \times 10^{-10} \text{ C}$$

La carica di polarizzazione sulla superficie a $r = R_1$ è:

$$Q_{PS} = \sigma_P \, 2 \, \pi \, R_1 \, L = \frac{\epsilon_r - 1}{4\epsilon_r} \, c \, R_1^3 \, 2 \, \pi \, R_1 \, L = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\pi}{2} \; c \, L \, R_1^4 = 5.65 \times 10^{-10} \text{ C}$$

uguale ed opposta alla carica di polarizzazione di volume (il dielettrico è neutro).

**Soluzione 2**

a) Scriviamo l'equazione del circuito:

$$V_0 - \frac{Q}{C} = R(t)\frac{dQ}{dt}$$

da cui, esplicitando i termini e separando le variabili (definiamo inoltre $\tau^2 = kC$), otteniamo:

$$\frac{tdt}{\tau^2} = \frac{dQ}{CV_0 - Q}$$

L'integrazione di questa equazione differenziale porta al risultato:

$$Q(t) = CV_0(1 - e^{-t^2/2\tau^2}) = CV_0(1 - e^{-t^2/2kC})$$

Per tempi molto grandi il condensatore sará completamente carico e la carica asintoticamente sulle armature sará:

$$Q(\infty) = CV_0 = \frac{\epsilon_0 \pi a^2 V_0}{\delta} = 1.4 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

In queste condizioni non passa piú corrente e il condensatore ha accumulato tutta l'energia del sistema.
b) Per ottenere la corrente che percorre il circuito deriviamo l'espressione della carica:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = CV_0\frac{t}{\tau^2}e^{-t^2/2\tau^2} = V_0\frac{t}{k}e^{-t^2/2kC}$$

che rappresenta una funzione che parte da un valore nullo e che si annulla asintoticamente dopo aver raggiunto un massimo di corrente. Il massimo di corrente si ha al tempo $t^* = \tau$, mentre il valore asintotico è:

$$I(\infty) = 0$$

c) Calcoliamo il campo elettrico all'interno del condensatore piano. Il campo è in ogni istante uniforme e ortogonale ai piani del condensatore. Il suo modulo è dato da:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{V_0}{\delta}(1 - e^{-t^2/2\tau^2})$$

Asinoticamente:

$$E(\infty) = \frac{V_0}{\delta} = 2.0 \times 10^4\,\mathrm{V/m}$$

d) Durante la carica del condensatore, si sviluppa all'interno del condensatore stesso un campo magnetico per la presenza della corrente di spostamento dovuta alla variazione del campo elettrico. Calcoliamo prima il vettore intensitá di corrente di spostamento $J_s$ e dal suo flusso ricaviamo poi il valore dell'induzione magnetica $B$. $J_s$ risulta essere diretto come il campo elettrico ed avere anche il suo stesso verso. Il suo modulo risulta pari a:

$$J_s = \epsilon_0\frac{dE}{dt} = \epsilon_0\frac{V_0}{\delta}\frac{t}{\tau^2}e^{-t^2/2\tau^2}$$

Si tratta di una corrente che si annulla a tempi infiniti quando il condensatore si sará caricato e non ci sará dunque piú corrente nel circuito. Per ricavare l'induzione magnetica utilizziamo il teorema di Ampere. Per ragioni di simmetria ci aspettiamo che il campo dipenda solo da $r$, cioé dalla distanza dal centro del condensatore. Scriviamo dunque il teorema di Ampere per una generica linea circolare di raggio $r$:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_s$$

In cui $I_s$ rappresenta il flusso di $J_s$ attraverso la superficie circolare individuata da $l$. Sviluppando si ha:

$$2\pi r B(r,t) = \mu_0 \pi r^2 J_s$$

da cui:

$$B(r,t) = \frac{\epsilon_0\mu_0 V_0}{2\tau}\left(\frac{r}{\delta}\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{-t^2/2\tau^2} = \frac{\mu_0 V_0}{2k\pi a^2}rt\; e^{-t^2/2kC}$$

Asintoticamente il campo magnetico si annulla per tutti i valori di $r$, coerentemente con l'annullamento della corrente di spostamento. Visto dall'armatura che si sta caricando positivamente (quella in alto in figura), il campo $\vec{B}$ ha verso orario

e) In ogni punto del volume interno al condensatore, il vettore di Poynting ha direzione radiale e verso entrante. Sulla superficie laterale di tale volume, il vettore di Poynting è uniforme e pertanto il suo flusso è dato semplicemente dal prodotto del suo modulo per la superficie laterale del condensatore. Calcoliamo il modulo del vettore di Poynting istante per istante per $r = a$:

$$S(a,t) = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{\epsilon_0 a V_0^2}{2\tau^2\delta^2} t(e^{-t^2/2\tau^2} - e^{-t^2/\tau^2}) = \frac{V_0^2}{2\pi a\delta}\frac{t}{k}(e^{-t^2/2kC} - e^{-t^2/kC})$$

da cui il flusso:

$$\phi(S) = S\ 2\pi a\delta = V_0^2 \frac{t}{k}(e^{-t^2/2kC} - e^{-t^2/kC})$$

Asintoticamente anche il flusso del vettore di Poynting tende ad annullarsi.

f) Nel corso del processo di carica, il generatore fornisce al circuito un'energia complessiva $E_{gen}$ che in parte è utilizzata per caricare il condensatore ($E_{cond}$) e in parte è dissipata sulla resistenza variabile per effetto Joule ($E_{diss}$). A sua volta l'energia $E_{cond}$ deve essere uguale all'integrale temporale da 0 a $\infty$ del flusso del vettore di Poyting $E_{Poyn}$.

Calcoliamo queste energie e verifichiamo che le nostre predizioni sono verificate.

$$\begin{aligned}
E_{gen} &= \int_0^\infty V_0 I(t)dt = \frac{CV_0^2}{\tau^2}\int_0^\infty te^{-t^2/2\tau^2}dt = CV_0^2 = 1.4 \times 10^{-8}\ \mathrm{J} \\
E_{cond} &= \frac{1}{2}CV_0^2 \\
E_{diss} &= \int_0^\infty R(t)I(t)^2 dt = \frac{CV_0^2}{\tau^2}\int_0^\infty te^{-t^2/\tau^2}dt = \frac{1}{2}CV_0^2 = 6.9 \times 10^{-9}\ \mathrm{J} \\
E_{Poyn} &= \int_0^\infty \phi(S)dt = \frac{CV_0^2}{\tau^2}\Big(\int_0^\infty te^{-t^2/2\tau^2}dt - \int_0^\infty te^{-t^2/\tau^2}dt\Big) = \frac{1}{2}CV_0^2 = 6.9 \times 10^{-9}\ \mathrm{J}
\end{aligned}$$

che verifica il bilancio energetico prima delineato.