Prova Scritta di Elettromagnetismo - 16.07.2021

(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini/F. Mauri)

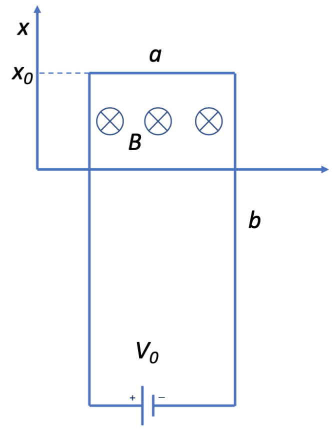
Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.
Per recuperare la prima prova di esonero, risolvere il primo esercizio in 1 ora e 30 minuti.
Per recuperare la seconda prova di esonero, risolvere il secondo esercizio in 1 ora e 30 minuti.

Esercizio 1

Un condensatore piano ha le armature circolari di raggio $R = 20\,\text{cm}$ distanti $d = 0.5\,\text{cm}$ ($d \ll R$). Al suo interno si trova un materiale dielettrico caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = a + b\,r$ dove r è la distanza dall'asse del condensatore, $a = 2.0$ e $b = 25\ \text{cm}^{-1}$.
Assumendo le linee di forza dei campi perpendicolari alle armature, si determinino:
a) la capacità del condensatore;
b) l'intensità del campo elettrico quando sulle armature è depositata una carica $Q = 1.5\,\text{nC}$;
c) la densità, la quantità e la posizione delle cariche di polarizzazione presenti;
d) la densità superficiale di carica (di conduzione e di polarizzazione) commentando il risultato;
e) la frazione di energia elettrostatica contenuta al suo interno nel volume con $r < R/2$.

Esercizio 2

Un circuito elettrico di forma rettangolare di lati a=50 cm e $b \gg a$, e di massa complessiva m=128 g, comprende una batteria che eroga una d.d.p. pari a V_0=36 V e una resistenza complessiva pari a R=15 Ω. Il circuito è disposto sul piano verticale come in figura ed è inizialmente tenuto fermo con il lato superiore posto all'altezza $x_0 > 0$. Nel semipiano $x > 0$ vi è un campo di induzione magnetica costante ortogonale al piano del circuito e con verso entrante, e di intensità pari a B=1.1 T. All'istante $t = 0$ il circuito viene lasciato libero di muoversi sul piano verticale. Trascurando l'autoinduzione del circuito, si determini:
a) l'intensità di corrente che scorre nel circuito in funzione del tempo ed il suo valore asintotico;
b) la velocità del circuito in funzione del tempo e il suo valore asintotico, stabilendo in particolare se il circuito si alza o si abbassa;
c) per quale valore del potenziale V_0 il circuito resta sospeso ed il valore della corrente che percorre il circuito in questa condizione;
d) in condizioni di regime (per $t \gg \tau$), nel caso V_0=36 V, la potenza erogata dal generatore e quella dissipata nel circuito e si discuta il bilancio energetico del processo.



Soluzione 1

a) Le armature del condensatore sono equipotenziali. Diciamo V la d.d.p. tra le armature del consensatore. Nell'approssimazione $d << R$ e di linee di campo perpendicolari alle armature, il campo elettrico all'interno deve essere pari a:

$$E = \frac{V}{d}$$

Poiché $\epsilon_r = a + b\,r$ è funzione della distanza dall'asse del condensatore, abbiamo un vettore induzione elettrica:

$$D(r) = \epsilon\, E = \epsilon_0\,(a + b\,r)\,E$$

A questo corrisponde una densità superficiale di cariche localizzate:

$$\sigma(r) = D(r) = \epsilon\, E = \epsilon_0\,(a + b\,r)\,\frac{V}{d}$$

e una carica totale Q sulle armature:

$$Q = \int_0^R 2\pi\, r\, \sigma(r)\, dr = 2\pi\, \epsilon_0\, \frac{V}{d} \int_0^R r\,(a + b\,r)\, dr =$$

$$Q = \frac{2\,\pi\,\epsilon_0\,V}{d}\left[\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}b\,R^3\right]$$

Ne segue:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\,\pi\,\epsilon_0}{d}\left[\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}b\,R^3\right] = 74.6 \text{ nF}$$

In alternativa il condensatore si può pensare come composto da condensatori in parallelo aventi per armature corone circolari di raggio interno r ed esterno $r + dr$ distanti d. Per ognuna di queste la capacità è:

$$dC = \frac{\epsilon\, dS}{d} = \frac{\epsilon_0\,(a + br)\,2\,\pi\, r\, dr}{d}$$

e la capacità totale del parallelo è:

$$C = \int dC = \frac{2\,\pi\,\epsilon_0}{d}\int_0^R (a + br)\, r\, dr = \frac{2\,\pi\,\epsilon_0}{d}\left[\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}b\,R^3\right]$$

b) Il valore del campo elettrico è:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{C\,d} = 4 \text{ V/m}$$

c) Il vettore intensità di polarizzazione, orientato come il campo elettrico dall'armatura positiva alla negativa, è:

$$P = \epsilon_0\,\chi\, E = \epsilon_0\,(a - 1 + b\,r)\;\frac{Q}{C\,d}$$

La carica di polarizzazione ha densità superficiale di carica negativa (positiva) sull'armatura positiva (negativa):

$$\sigma_P(r) = -\epsilon_0\;(a - 1 + b\,r)\;\frac{Q}{C\,d}$$

La carica totale di polarizzazione a contatto con l'armatura positiva è:

$$Q_{PS} = \int_0^R \sigma_P(r)\, 2\pi\, r\, dr = -2\pi\,\epsilon_0\;\left[(a-1)\frac{R^2}{2} + \frac{b}{3}R^3\right]\;\frac{Q}{C\,d} = 1.496 \text{ nC}$$

Su quella negativa è presente una carica di segno opposto.
In un sistema di coordinate cilindriche con asse z l'asse del condensatore il vettore intensità di polarizzazione avrebbe solo componente z:

$$P_z = \epsilon_0\,\chi\, E = \epsilon_0\,(a - 1 + b\,r)\;\frac{Q}{C\,d}\;\hat{z}$$

Per il calcolo della densità di carica di polarizzazione di volume dobbiamo usare la relazione:

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

usando l'espressione dell'operatore in coordinate cilindriche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(r\,P_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Poiché $P_r = P_\varphi = 0$ e P_z non dipende da z si trova: $\rho_P = 0$. Quindi non ci sono cariche di polarizzazione di volume all'interno del condensatore.

d) La densità totale di carica è:

$$\sigma_{tot} = \sigma(r) + \sigma_P(r) = \epsilon\,E = \epsilon_0\,(a + b\,r)\,\frac{V}{d} - \epsilon_0\,(a - 1 + b\,r)\,\frac{Q}{C\,d} = \frac{\epsilon_0\,V}{d}$$

$$\sigma_{tot} = \frac{\epsilon_0\,Q}{d\,C} = \frac{Q}{2\pi\,\left[\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}b\,R^3\right]} = 35.6 \text{ pC/m}^2$$

indipendente da r come aspettato per un campo elettrico uniforme tra le armature.

e) La densità di energia elettrostatica nel dielettrico è:

$$u(r) = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,(a + br)\,\left(\frac{Q}{C\,d}\right)^2$$

L'energia elettrostatica nel volume del condensatore con raggio $r < R/2$ è:

$$U(R/2) = 2\pi\,d\int_0^{R/2} u(r)\,r\,dr = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{2\pi\epsilon_0}{8d}\left[aR^2 + \frac{b}{3}R^3\right]$$

l'energia totale è:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

quindi in $r < R/2$ è contenuta una frazione di energia:

$$\frac{U(r < R/2)}{U_{tot}} = \frac{1}{4}\,\frac{(3aR^2 + bR^3)}{(3aR^2 + 2bR^3)} = 0.13$$

Soluzione 2

a) Detta $x(t)$ la posizione del lato superiore del circuito all'istante di tempo t e $I(t)$ il valore dell'intensità di corrente che scorre nel circuito assumendo come positivo il verso di percorrenza orario, scriviamo l'equazione del circuito, tenendo conto della forza elettromotrice indotta dovuta alla parte del circuito che intercetta il campo magnetico:

$$V_0 - \frac{d\phi(B)}{dt} = RI$$

Il flusso del campo magnetico dipende da x, pertanto:

$$\frac{d\phi(B)}{dt} = a\dot{x}B$$

Sostituendo otteniamo:

$$V_0 - a\dot{x}B = RI \tag{1}$$

D'altra parte l'equazione del moto del circuito risulta essere la seguente:

$$m\ddot{x} = -mg + aBI \tag{2}$$

in cui abbiamo specificato che per $I > 0$, cioè quando la corrente scorre in verso orario, la forza magnetica spinge verso l'alto. Ricavando $\dot{x}$ dall'eq.1 e derivando ulteriormente otteniamo:

$$\ddot{x} = -\frac{R}{aB}\dot{I}$$

che, sostituita nell'eq.2 permette di ottenere un'equazione differenziale per la corrente $I(t)$:

$$-\frac{R}{aB}\frac{dI}{dt} = -g + \frac{aB}{m}I$$

Moltiplicando ambo i membri per m/aB e definendo le due grandezze:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{mR}{a^2B^2} = 7.0\,\mathrm{s} \\ I_\infty &= \frac{mg}{aB} = 2.3\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

otteniamo, dopo aver separato le variabili, l'equazione differenziale:

$$\frac{dt}{\tau} = \frac{dI}{I_\infty - I}$$

che dobbiamo integrare tra l'istante di tempo $t = 0$ corrispondente alla corrente iniziale $I_0 = V_0/R$=2.4 A e il generico tempo t. La soluzione risulta essere la seguente:

$$I(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)e^{-t/\tau} \tag{3}$$

Per tempi $t >> \tau$ la corrente assume il valore asintotico $I(\infty)$ =2.3 A.
b) Direttamente dall'equazione 1 ricaviamo l'espressione della velocitá $v = \dot{x}$ in funzione della corrente.

$$v(t) = \frac{V_0}{aB} - \frac{R}{aB}I(t)$$

Sostituendo l'espressione della corrente $I(t)$ data dalla eq.4 e raccogliendo i termini otteniamo:

$$v(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau})$$

dove

$$v_\infty = \frac{1}{aB}\big(V_0 - \frac{mgR}{aB}\big) = 3.2\,\mathrm{m/s} \tag{4}$$

da cui evinciamo che il circuito sale.
c) Dall'eq.4 possiamo vedere qual è la condizione per cui la velocità asintotica sia positiva corrispondente al circuito che si alza e si muove indefinitamente verso l'alto. Deve essere:

$$V_0 > \frac{mgR}{aB} = 34.2\,\mathrm{V}$$

Se V_0 risulta essere uguale al valore limite, il circuito resta fermo e la corrente che lo percorre sarà data da $I_0 = I_\infty$ e pertanto resta pari a I_0=2.4 A.
d) Calcoliamo la potenza erogata dal generatore e quella dissipata sulla resistenza del circuito a regime.

$$\begin{aligned} W_{gen} &= V_0 I_\infty = \frac{V_0 mg}{aB} = 82.2\,\mathrm{W} \qquad (5) \\ W_{diss} &= RI_\infty^2 = \frac{Rm^2g^2}{a^2B^2} = 78.2\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Per il bilancio energetico complessivo dobbiamo tenere conto anche del lavoro della forza data dalla seconda legge di Laplace che contrasta la forza peso, la cui potenza durante il moto del circuito verso l'alto è:

$$W_{Laplace} = mgv_\infty = \frac{mg}{aB}\left(V_0 - \frac{mgR}{aB}\right) = 4.0\,\mathrm{W}$$

Si verifica agevolmente che vale la relazione:

$$W_{gen} = W_{diss} + W_{Laplace} \tag{6}$$