

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri un piano indefinito uniformemente carico con densità di carica superficiale $\sigma = 3.2 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$ e una sfera isolante di raggio $R = 1.0 \text{ cm}$ uniformemente carica con densità di carica volumica $\rho = 5.6 \times 10^{-5} \text{ C/m}^3$ con il centro posto a distanza $d = 5.0 \text{ cm}$ dal piano. Sia definito un piano cartesiano con assi x e y come in figura.

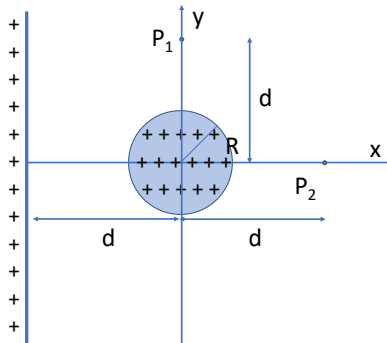
a) Si determini il campo elettrico lungo l'asse x a partire dal piano e in funzione della coordinata x .

Un elettrone (massa $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e carica $q = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) viene posto nella posizione P_1 di coordinate $(0, d)$ e viene in seguito spostato nella posizione P_2 di coordinate $(d, 0)$.

b) Si determinino, nelle due posizioni P_1 e P_2 , i moduli del campo elettrico e gli angoli formati dalle direzioni del campo con l'asse x .

c) Si determini il lavoro necessario per portare la carica dalla posizione P_1 alla posizione P_2 .

d) Una volta lasciato libero a velocità nulla nella posizione P_2 si determini con che velocità l'elettrone raggiungerà la superficie della sfera.



Esercizio 2

Una spira quadrata S_1 di lato $l = 7.0 \text{ mm}$ e resistenza complessiva $R = 3.0 \text{ m}\Omega$ è situata al centro di una seconda spira circolare S_2 di raggio $b = 10 \text{ cm}$ come in figura. Una corrente stazionaria $I = 12 \text{ mA}$ circola nella spira S_2 che è tenuta fissa nello spazio. La spira S_1 viene fatta ruotare con velocità angolare costante e pari a $\omega = 3.2 \times 10^3 \text{ rad/s}$. All'istante iniziale i piani delle due spire coincidono.

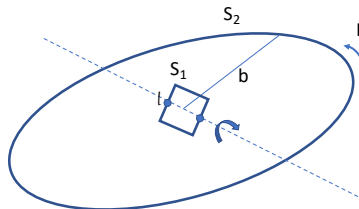
Determinare:

(a) il coefficiente di mutua induzione tra le due spire in funzione del tempo, calcolandone il valore all'istante iniziale;

(b) la corrente $i(t)$ indotta in S_1 in funzione del tempo e il suo valore massimo;

(c) il momento meccanico che è necessario applicare sull'asse della spira S_1 per mantenerla in rotazione in funzione del tempo e il suo valore massimo;

(d) l'energia dissipata nella spira S_1 in ogni giro.



Soluzione 1

a) Il campo elettrico generato dal piano carico non dipende dalla distanza (teorema di Gauss) è costante in tutto il semipiano $x > -d$ ed è pari a:

$$\vec{E}_p = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x}$$

Lungo l'asse x il campo generato dalla sfera uniformemente carica ($Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 2.3 \times 10^{-10}$ C) è:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{sf} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \hat{x} \quad \text{per} \quad -d < x < -R \\ \vec{E}_{sf} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(x)}{x^2} \hat{x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi x^3 \frac{1}{x^2} \hat{x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{R^3} \hat{x} \quad \text{per} \quad -R < x < R \\ \vec{E}_{sf} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \hat{x} \quad \text{per} \quad x > R\end{aligned}$$

Il campo totale lungo l'asse x è sempre diretto lungo l'asse x ed è dato nelle diverse regioni di x da:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \hat{x} \quad \text{per} \quad -d < x < -R \\ \vec{E}_{tot} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{R^3} \hat{x} \quad \text{per} \quad -R < x < R \\ \vec{E}_{tot} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \hat{x} \quad \text{per} \quad x > R\end{aligned}$$

b) Nel punto P_1 il campo è:

$$\vec{E}_{P_1} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \hat{y}$$

con modulo:

$$E_{P_1} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2}\right)^2} = 2.00 \text{ kV/m}$$

l'angolo θ con l'asse x è dato dalla relazione:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2}}{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{Q}{2\pi\sigma d^2} \right) = 24.6^\circ$$

Nel punto P_1 il campo è:

$$\vec{E}_{P_2} = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \right) \hat{x}$$

con modulo

$$E_{P_2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} = 2.65 \text{ kV/m}$$

e angolo chiaramente nullo.

c) La differenza di potenziale tra i punti P_2 e P_1 dovuta alla carica sul piano è:

$$V_p(P_2) - V_p(P_1) = \int_{P_2}^{P_1} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} d$$

La differenza di potenziale dovuta alla sfera carica è nulla:

$$V_{sf}(P_2) - V_{sf}(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d} = 0$$

Il lavoro positivo per portare l'elettrone dal punto P_1 al punto P_2 è:

$$L = q [V_p(P_2) - V_p(P_1)] = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} q d = 1.85 \times 10^{-19} \text{ J}$$

d) L'energia cinetica acquistata dall'elettrone è pari al lavoro fatto dal campo sulla carica q nell'andare da P_2 al punto P di intersezione tra il semiasse x positivo e il bordo della sfera carica:

$$L = \int_{P_2}^P q \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{s} = \int_{P_2}^P q \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \right) dx = q \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - d) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) \right] > 0$$

e per il teorema delle forze vive (dell'energia cinetica):

$$v = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2q}{m} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - d) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) \right]} = 9.1 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Soluzione 2

a) Utilizziamo la definizione di coefficiente di mutua induzione considerando il flusso in S_1 del campo magnetico B generato da S_2 . Assumiamo che S_1 sia sufficientemente piccola in modo da poter utilizzare l'approssimazione per cui sulla superficie di S_1 il campo è uniforme e pari a quello al centro di S_2 :

$$\phi_1(B) = MI \quad B = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

da cui:

$$M(t) = \frac{\phi_1(B)}{I} = l^2 \cos \omega t \frac{\mu_0 I}{2b} \frac{1}{I} = \frac{\mu_0 l^2}{2b} \cos \omega t$$

All'istante iniziale:

$$M(t=0) = \frac{\mu_0 l^2}{2b} = 3.1 \times 10^{-10} \text{ H}$$

b) Utilizziamo la legge di Farady-Neumann per determinare la corrente $i(t)$ in funzione del tempo. Trattandosi di un moto rotatorio uniforme, poniamo direttamente l'angolo θ tra la normale alla spira e la direzione del campo magnetico pari a ωt :

$$i(t) = \frac{f_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 l^2}{2b} I \cos \omega t \right) = \frac{\mu_0 l^2 \omega I}{2bR} \sin \omega t$$

da cui il valore massimo:

$$i_{max} = \frac{\mu_0 l^2 \omega I}{2bR} = 3.9 \times 10^{-6} \text{ A}$$

c) Occorre fornire un momento torcente uguale e contrario al momento delle forze magnetiche che agiscono sui due tratti della spira S_1 paralleli al piano di S_2 . Tale momento torcente (che chiamiamo τ) dipende dalla corrente che scorre sulla spira e dall'angolo tra la normale alla spira e il campo ($\vec{\tau} = i\vec{m} \times \vec{B}$) ed è diretto lungo l'asse di rotazione della spira.

$$|\tau(t)| = m B \sin \omega t = 2 \frac{l}{2} \sin \omega t l i(t) B = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 \omega}{4b^2 R} \sin^2 \omega t \quad m = i(t) l^2$$

da cui il valore massimo:

$$|\tau(t)|_{max} = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 \omega}{4b^2 R} = 1.4 \times 10^{-17} \text{ Nm}$$

d) Possiamo determinare l'energia dissipata in un giro o integrando il momento nell'angolo θ o integrando la potenza dissipata nel tempo.

$$W_{diss} = \int_0^{2\pi} \tau(\theta) d\theta = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 \omega}{4b^2 R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 \omega}{8b^2 R} = 7.2 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$W_{diss} = \int_0^{2\pi/\omega} R I_1(t)^2 dt = R \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 \omega^2}{4b^2 R} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{\mu_0^2 I^2 l^4 \omega}{8b^2 R} = 7.2 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Otteniamo lo stesso risultato.