Prova Scritta Elettromagnetismo - 06.05.2022

(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

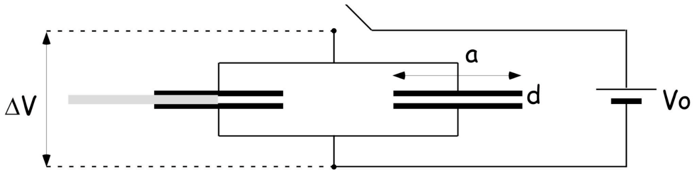
Esercizio 1

Due condensatori uguali a facce piane e parallele quadrate di lato $a = 10\,\text{cm}$ e distanza tra le armature $d = 1.0\,\text{mm}$, sono collegati in parallelo ed inizialmente caricati ad una differenza di potenziale $V_0 = 2.0 \times 10^3\,\text{V}$. Staccato il generatore e mantenuto isolato il sistema dei due condensatori, in uno di essi viene inserita, parallelamente alle armature e sino ad occupare metà del suo volume, una lastra di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo di spessore d e superficie quadrata di lato a. In questa nuova condizione, dopo l'inserimento della lastra dielettrica, si misura una differenza di potenziale ai capi dei condensatori $\Delta V = 1.6 \times 10^3\,\text{V}$. Si calcoli:

a) il valore della costante dielettrica relativa ϵ_r della lastra;

b) per il condensatore in cui viene inserito il dielettrico, il rapporto tra le cariche sulle armature dopo e prima dell'inserimento;

c) la forza che agisce sulla lastra dielettrica.



Esercizio 2

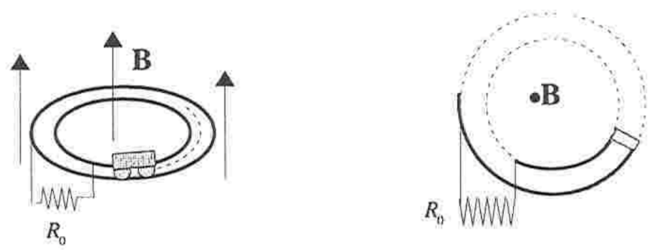
Un carrello metallico si muove su un binario circolare, di raggio interno $r_1 = 8.0\,\text{cm}$ ed esterno $r_2 = 15.0\,\text{cm}$, immerso in un campo di induzione magnetica uniforme $B = 2.5\,\text{T}$ perpendicolare al binario, come in figura. Tra i due binari è posta una resistenza $R_0 = 20\,\Omega$ che chiude il circuito. Il carrello metallico e i binari hanno resistenza trascurabile. Il carrello ha massa m ed è tenuto in movimento da una forza $F = 0.30\,\text{N}$ applicata al suo centro di massa e diretta sempre tangenzialmente alla circonferenza (in verso antiorario). Schematizzando il carrello come una sbarretta metallica di lunghezza $d = r_2 - r_1$, e trascurando effetti di autoinduzione, si trovi:

a) l'espressione della corrente i che attraversa il carrello, in funzione della velocità angolare ω del carrello;

b) il valore della f.e.m. indotta quando si è raggiunto il regime stazionario;

c) la velocità angolare ω_∞ quando si è raggiunto il regime stazionario;

d) la potenza dissipata nella resistenza quando si è raggiunto il regime stazionario.



Soluzione 1

a)

Inizialmente il sistema è composto dal parallelo di due condensatori uguali di capacità

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}$$

La carica totale vale quindi

$$Q = C_{\|} V_0 = 2C_1 V_0 = 2\frac{\epsilon_0 a^2}{d} V_0$$

Dopo l'inserimento del dielettrico si ha il parallelo di tre capacità:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 a^2}{2d}; \quad C_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a^2}{2d}$$

La carica totale vale quindi

$$Q = (C_1 + C_2 + C_3)\Delta V = \left(\frac{3}{2} + \frac{\epsilon_r}{2}\right) \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \Delta V$$

Uguagliando la carica prima e dopo l'inserimento si ha

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\epsilon_r}{2}\right) \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \Delta V = 2\frac{\epsilon_0 a^2}{d} V_0$$

da cui

$$(3 + \epsilon_r)\Delta V = 4V_0$$

$$\epsilon_r = 4\frac{V_0}{\Delta V} - 3 = 2.0$$

b)

Prima dell'inserimento, nel condensatore si ha

$$Q_{\text{iniziale}} = C_1 V_0$$

dopo l'inserimento

$$Q_{\text{finale}} = (C_2 + C_3)\Delta V$$

Quindi il loro rapporto vale

$$r = \frac{Q_{\text{finale}}}{Q_{\text{iniziale}}} = \frac{C_2 + C_3}{C_1}\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\epsilon_r + 1}{2}\frac{\Delta V}{V_0} = 1.2$$

c)

Se la lastra è inserita per una lunghezza x, la capacità del sistema vale

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a x}{d} + \frac{\epsilon_0 a(a-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 a}{d}(a + \epsilon_r x + a - x) = \frac{\epsilon_0 a}{d}(2a + (\epsilon_r - 1)x)$$

L'energia elettrostatica immagazzinata dal sistema vale

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

A carica costante la forza vale

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{C(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2(x)}\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2}\Delta V^2 \frac{\epsilon_0 a}{d}(\epsilon_r - 1) = 1.1 \times 10^{-3}\,\text{N}$$

si tratta quindi di una forza attrattiva (risucchio).

Soluzione 2
a)
La fem indotta vale

$$fem = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}B\omega t\right) = -\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}B\omega$$

la corrente vale quindi

$$i = \frac{fem}{R} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2R}B\omega$$

e scorre dall'interno verso l'esterno.
b)
La legge del moto per il corpo in rotazione è

$$I\dot{\omega} = M$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema e M il momento meccanico della forza F e della forza di Lorentz. La forza di Lorentz che agisce su un tratto radiale di conduttore vale

$$dF = -idrB$$

Si ha quindi

$$M = F\frac{r_2 - r_2}{2} + \int_{r_1}^{r_2} rdF = F\frac{r_1 + r_2}{2} - \int_{r_1}^{r_2} riBdr = F\frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}iB = F\frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{2}iB$$

A regime si ha $\dot{\omega} = 0$, e quindi

$$i = \frac{F}{(r_2 - r_1)B}$$

e la fem indotta vale

$$fem = \frac{F}{(r_2 - r_1)B}R = 34\,\mathrm{V}$$

c)
Dato che

$$i = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2R}B\omega$$

e che a regime

$$i = \frac{F}{(r_2 - r_1)B}$$

si ha, a regime

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{2R}B\omega_\infty = \frac{F}{(r_2 - r_1)B}$$

da cui

$$\omega_\infty = \frac{2FR}{(r_2 - r_1)(r_2^2 - r_1^2)B^2} = 1700\,\mathrm{rad/s}$$

d)
La potenza vale

$$P = i^2R = \left(\frac{F}{(r_2 - r_1)B}\right)^2 R = 59\,\mathrm{W}$$