Prova Scritta Elettromagnetismo - 04.11.2022

(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Un sistema elettrostatico è costituito da uno strato carico, con densità di carica $\sigma = 6.0\,\mathrm{nC/m^2}$, in cui è praticato un foro di raggio $R = 4.0\,\mathrm{cm}$ (come in figura).

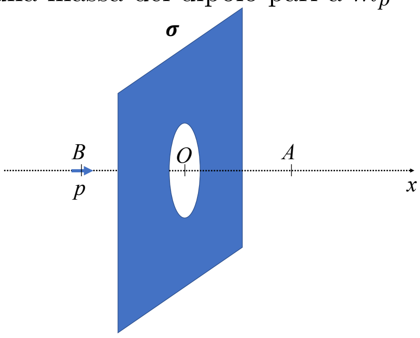
a) Si calcoli il valore del campo elettrico sull'asse $\hat{x}$ perpendicolare allo strato e passante al centro del foro, calcolandone il valore numerico nell'origine, a distanza $x \gg R$, nel punto A di coordinata $x_A = 5.0\,\mathrm{cm}$, e nel punto B di coordinata $x_B = -x_A$.

Nel punto B viene posto un dipolo elettrico di momento di dipolo $p = 6.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{Cm}$, con la carica positiva più vicina al piano carico. Il dipolo è vincolato a rimanere sull'asse $\hat{x}$ con verso concorde con $\hat{x}$. Si calcoli:

b) la forza che agisce sul dipolo (nel punto B), in modulo, direzione e verso;

c) la carica q che si dovrebbe aggiungere al dipolo per mantenerlo fermo nel punto B;

d) la velocità asintotica raggiunta dal dipolo se viene lascaito libero di muoversi sull'asse $\hat{x}$ in assenza della carica aggiuntiva al punto (c), considerando una massa del dipolo pari a $m_p = 3.5\,\mathrm{g}$.



Esercizio 2

Un filo rettilineo e indefinito è percorso da una corrente costante $I = 0.52\,\mathrm{kA}$. Due guide conduttrici parallele spaziate di $a = 22\,\mathrm{cm}$ e di resistenza trascurabile sono collocate ortogonalmente al filo a partire da una distanza pari ad a come in figura. Le guide sono elettricamente connesse tramite due barre conduttrici trasversali di lunghezza a, ciascuna di resistenza $R = 0.26\,\Omega$. La prima barra è mantenuta fissa, la seconda può scorrere. All'istante $t = 0$ le due barre sono entrambi a distanza a dal filo e la seconda barra prende a muoversi a velocità costante $v = 16.2\,\mathrm{m/s}$ lungo l'asse x per opera di una forza esterna. Si determini.

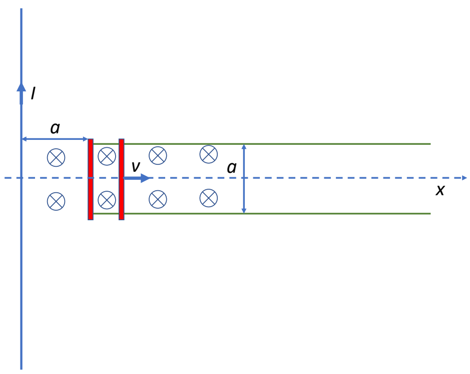
a) il flusso del campo di induzione magnetica concatenato al circuito costituito dalle guide e dalle barre in funzione della posizione x della seconda barra, $\Phi_B(x)$;

b) la corrente che scorre nel circuito in funzione del tempo, indicandone il verso ed il valore massimo;

c) la forza esterna necessaria per tenere la seconda barra in moto in funzione della posizione della barra, il suo verso ed il valore massimo del suo modulo;

d) il lavoro fatto dalla forza esterna per portare la seconda barra fino ad una distanza pari a $2a$ dal filo;

e) l'energia dissipata per effetto Joule nello stesso intervallo di tempo.



Soluzione 1

a) calcoliamo il campo sull'asse come il campo prodotto da tanti anelli di spessore raggio r, e spessore dr, integrando per r da R a ∞:

$$E_x = \int_0^{E_x} dE'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{\sigma 2\pi r}{r^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{rx}{(r^2+x^2)^{3/2}} dr$$

Definendo

$$t = r^2 + x^2; \qquad\qquad dt = 2rdr$$

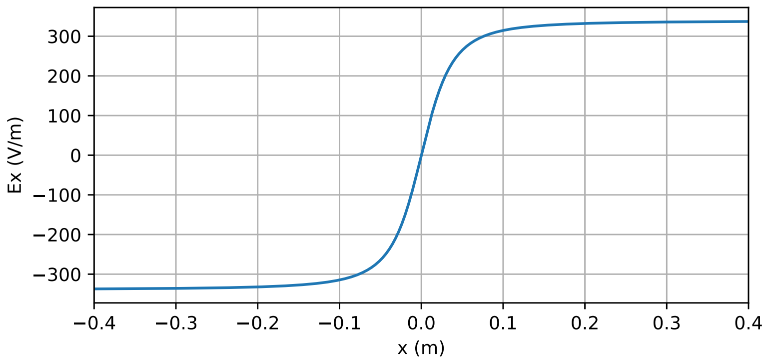
diventa

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{2} \int t^{-3/2} dt = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{2} (-2t^{-1/2}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} \right]_R^\infty$$

da cui infine

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

rappresentato nella figura seguente



Nell'origine si ha:

$$E_x(x=0) = 0$$

A grande distanza:

$$\lim_{x\to\infty} E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 339\,\mathrm{V/m}$$

Nel punto A:

$$E_x(x = x_A) = 265\,\mathrm{V/m}$$

Nel punto B:

$$E_x(x = x_B) = -265\,\mathrm{V/m}$$

b) dato che il campo ha solo la component x, la forza sul dipolo ha solo componente x che vale

$$F_x = p\frac{d}{dx} E_x = \frac{p\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

La forza è sempre positiva, e quindi nel verso delle x positive. Per $x = x_B$ vale

$$F_x(x = x_B) = \frac{p\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(x_B^2+R^2)^{3/2}} = 13.4\,\mathrm{N}$$

c) Per bilanciare la forza sul dipolo ricavata al punto precedente, è necessario aggiungere una carica q tale che

$$F_x(x_B) + qEx(x_B) = 0$$

da cui

$$q = -\frac{F_x}{E_x} = -p\frac{R^2}{x_B}\frac{1}{x_B^2 + R^2} = 51\,\text{mC}$$

d) L'energia potenziale di un dipolo in campo elettrico vale $U_d = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, e nel nostro caso

$$U_d = -pE_x = -p\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Considerato che la forza agente sul dipolo è sempre positiva, il dipolo viene lanciato sull'asse delle x in direzione delle x positive. Dal bilancio dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2}mv_v^2 + U_d(x \gg R) = U_d(x = x_A)$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv_v^2 = U_d(x = x_A) - U_d(x \gg R) = -p\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2 + x_A^2}} + p\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = p\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x_A^2}}\right)$$

da cui infine

$$v_f = \sqrt{\frac{p\sigma}{\epsilon_0 m_p}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x_A^2}}\right)} = 47\,\text{m/s}.$$

Soluzione 2

(a) Definita la coordinata x avente origine sul filo e diretta come in figura, la legge di Biot-Savart ci fornisce l'espressione del campo magnetico in funzione di x

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{x} \tag{1}$$

da cui ricaviamo il flusso concatenato con il circuito in funzione di x:

$$\Phi_B(x) = a\int_a^x B(x')dx' = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_a^x \frac{1}{x'}dx' = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{x}{a} \tag{2}$$

(b) Applichiamo la legge di Faraday-Neumann-Lenz per ricavare la corrente i che scorre nel circuito. Esprimiamo il flusso in funzione del tempo osservando che $x = a + vt$.

$$i(t) = -\frac{1}{2R}\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dt}\ln\frac{a + vt}{a} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R}\frac{v}{a + vt} \tag{3}$$

La corrente circola in verso anti-orario guardando la figura e risulta massima all'istante iniziale quando vale

$$i_{max} = i(t = 0) = \frac{\mu_0 I v}{4\pi R} = 3.25\,\text{mA} \tag{4}$$

per poi decrescere fino ad annullarsi asintoticamente.
(c) Essendo il moto della barra mobile a velocità costante, la forza esterna deve essere uguale e contraria alla forza magnetica che agisce sulla barra stessa. Dovendo esprimere la forza in funzione di x esprimiamo la corrente in funzione di x.

$$i(x) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R}\frac{v}{x} \tag{5}$$

Si ha pertanto:

$$F_{ext} = i(x)aB(x) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R}\frac{v}{x}a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{x} = \frac{\mu_0^2 a^2 I^2 v}{8\pi^2 R}\frac{1}{x^2} \tag{6}$$

Si tratta di una forza diretta verso le x positive e avente valore massimo all'istante iniziale quando $x = a$ pari a:

$$F_{ext,max} = \frac{\mu_0^2 I^2 v}{8\pi^2 R} = 3.37 \times 10^{-7}\,\text{N} \tag{7}$$

(d) Calcoliamo il lavoro utilizzando la sua definizione:

$$L_{ext} = \int_a^{2a} F_{ext}(x)dx = \frac{\mu_0^2 a^2 I^2 v}{8\pi^2 R} \int_a^{2a} \frac{dx}{x^2} = \frac{\mu_0^2 I^2 av}{16\pi^2 R} = 3.71 \times 10^{-8}\,\mathrm{J} \tag{8}$$

(e) L'energia dissipata per effetto Joule può essere calcolata integrando la potenza dissipata in un intervallo di tempo corrispondente a quello nel quale la barra passa dalla posizione a alla posizione $2a$. Si tratta di un tempo $\Delta t = a/v$. Si ha:

$$E_{Joule} = \int_0^{a/v} W_{Joule}(t)dt = \int_0^{a/v} i^2(t)2Rdt = \frac{\mu_0^2 a^2 I^2 v^2}{8\pi^2 R} \int_0^{a/v} \frac{dt}{(a+vt)^2} \tag{9}$$

Risolviamo l'integrale ponendo $\xi = a + vt$

$$E_{Joule} = \frac{\mu_0^2 a^2 I^2 v^2}{8\pi^2 R} \frac{1}{v} \int_a^{2a} \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{\mu_0^2 I^2 av}{16\pi^2 R} \tag{10}$$

Pari al lavoro fatto dalla forza esterna. Pertanto tutto il lavoro speso dalla forza esterna si traduce in effetto Joule.