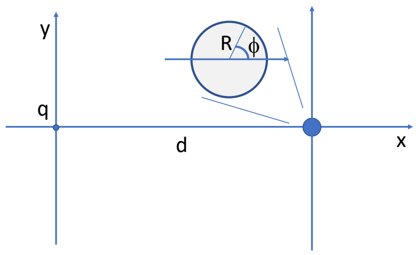
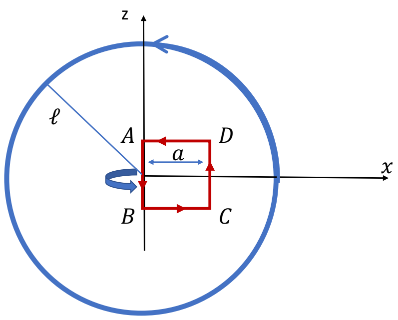
Prova Scritta Elettromagnetismo - 19.01.2023
(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Piacentini)

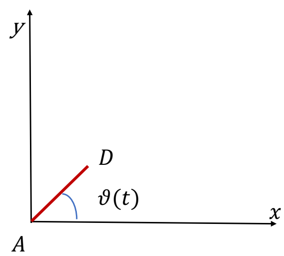
Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1
Una carica puntiforme $q = 36\,\mathrm{nC}$ si trova all'origine di un piano xy. Un disco di raggio $R = 2\,\mathrm{mm}$ si trova lungo l'asse x ad una distanza $d = 10\,\mathrm{cm}$ (da considerare $\gg R$) dall'origine, come mostrato in figura. Il disco è carico, e la sua densità di carica dipende dall'angolo ϕ definito in figura secondo la formula $\sigma(\phi) = \sigma_0 + \sigma_1 \sin\phi$ con $\sigma_0 = 1.4 \times 10^{-4}\,\mathrm{C/m^2}$ e $\sigma_1 = 0.3 \times 10^{-2}\,\mathrm{C/m^2}$. Si determini:
a) la carica Q complessiva presente sul disco;
b) il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ del disco calcolato rispetto al suo centro specificando modulo direzione e verso;
c) il momento torcente $\vec{M}$ subito dal disco ad opera della carica situata nell'origine specificando modulo direzione e verso;
d) la forza complessiva subita dal disco quando si trova nella posizione in figura ($x = d$, $y = 0$).
Supponendo che il disco non possa ruotare e sia libero di muoversi solo su una guida parallela all'asse y posta a distanza d come in figura, si determini:
e) l'andamento dell'energia potenziale del disco in funzione di y.



Esercizio 2
Una spira quadrata rigida di lato $a = 0.1\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R_b = 0.1\,\Omega$ è posta all'interno di un solenoide rettilineo come mostrato in figura dove l'asse del solenoide è uscente dal foglio. Il solenoide ha sezione circolare di raggio $\ell = 1\,\mathrm{cm}$ e lunghezza $L = 10\,\mathrm{cm}$, ed è costituito da $N = 10000$ spire. La resistenza totale del solenoide è $R_s = 1\,\Omega$. La spira giace inizialmente su un piano perpendicolare all'asse del solenoide, con il lato AB passante per il centro del solenoide. Nella spira circola una corrente $i(t) = i_b \sin(\omega t)$, con $i_b = 10\,\mathrm{A}$ e $\omega = 100\,\mathrm{s^{-1}}$, nel verso antiorario. Si ricavi:
a) il coefficiente di mutua induzione tra il solenoide e la spira, calcolandone il valore numerico;
b) l'espressione della corrente indotta nel solenoide trascurando il coefficiente di autoinduzione del solenoide stesso e calcolando il suo valore al tempo $t = 0$, specificandone il verso rispetto a quello indicato in figura.
Successivamente la spira viene sconnessa dal generatore di corrente alternata, e viene posta in rotazione intorno all'asse AB con velocità angolare costante $\omega = 100\,\mathrm{s^{-1}}$. Nel solenoide circola ora una corrente costante $i_s = 1\,\mathrm{A}$. Si determini:
c) l'espressione della corrente indotta nella spira trascurando il suo coefficiente di autoinduzione, calcolando il suo valore massimo;
d) l'energia dissipata per effetto Joule nella spira in un ciclo completo di rotazione intorno all'asse AB.





Soluzione 1

a) Calcoliamo la carica totale Q integrando la densità di carica sulla superficie del disco :

$$Q = \int \sigma dS = \sigma_0 \pi R^2 + \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_1 \sin\phi r dr d\phi = \sigma_0 \pi R^2 = 1.76 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

b) Calcoliamo il momento di dipolo elettrico rispetto al centro del disco basandoci sulla sua definizione:

$$\vec{p} = \int \sigma \vec{r} dS$$

La componente x, essendo $x = r\cos\phi$ è data da:

$$p_x = \int (\sigma_0 + \sigma_1 \sin\phi) r \cos\phi r dr d\phi = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} (\sigma_0 \cos\phi + \sigma_1 \sin\phi\cos\phi) d\phi = 0$$

dunque risulta nulla. La componente y, essendo $y = r\sin\phi$ è data da:

$$\begin{aligned} p_y &= \int (\sigma_0 + \sigma_1 \sin\phi) r \sin\phi r dr d\phi = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} (\sigma_0 \sin\phi + \sigma_1 \sin^2\phi) d\phi = \\ &= \frac{R^3}{3}\sigma_1 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \frac{\sigma_1 \pi R^3}{3} = 2.51 \times 10^{-11}\ \mathrm{Cm} \end{aligned}$$

pertanto il momento di dipolo elettrico è diretto lungo l'asse y verso l'alto nella figura.

$$\vec{p} = \frac{\sigma_1 \pi R^3}{3}\hat{y}$$

c) Il momento torcente esercitato sul disco dal campo elettrico dovuto alla carica q, è dato da:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

in cui il campo elettrico $\vec{E}$ nella posizione occupata dal disco è dato da:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2}\hat{x}$$

per cui:

$$\vec{M} = \frac{\sigma_1 \pi R^3}{3}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2}\hat{y} \times \hat{x} = -\frac{\sigma_1 R^3 q}{12\epsilon_0 d^2}\hat{z}$$

di modulo

$$|\vec{M}| = \frac{\sigma_1 R^3 q}{12\epsilon_0 d^2} = 8.13 \times 10^{-7}\ \mathrm{Nm}$$

lungo l'asse z ed entrante nel foglio, tendente ad allineare il momento di dipolo con l'asse x.

d) La forza complessivamente esercitata sul disco dal campo elettrico dovuto alla carica q ha due componenti: una prima componente, $\vec{F}_Q$, dovuta all'azione sulla carica Q e una seconda componente, $\vec{F}_p$, dovuta all'azione sul momento di dipolo $\vec{p}$. Calcoliamo separatamente le due componenti. La prima componente è:

$$\vec{F}_Q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 d^2}\hat{x} = \frac{qR^2\sigma_0}{4\epsilon_0 d^2}\hat{x}$$

diretta lungo x verso destra nella figura. Per il calcolo di $\vec{F}_p$ consideriamo separatamente le sue componenti x e y:

$$\begin{aligned} F_{px} &= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} = p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ F_{py} &= p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} = p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} \end{aligned}$$

essendo p_x=0. D'altra parte le due componenti di $\vec{E}$ sul piano sono:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Siamo interessati unicamente alla componente y del campo e alle sue derivate rispetto a x calcolate nel punto di coordinate $x = d$, $y = 0$. Sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{3qxy}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}} = 0 \text{ in } x = d,\ y = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{q(x^2-2y^2)}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^3} \text{ in } x = d,\ y = 0 \end{aligned}$$

Pertanto vi è solo una componente y della forza rivolta verso l'alto. Mettendo insieme otteniamo la forza complessiva:

$$\vec{F} = \vec{F}_Q + \vec{F}_p = \frac{q\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}\left[\sigma_0\hat{x} + \frac{\sigma_1 R}{3d}\hat{y}\right]$$

I valori numerici delle due componenti e del modulo sono:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{qR^2\sigma_0}{4\epsilon_0 d^2} = 5.69\times10^{-5}\ \text{N} \\ F_y &= \frac{qR^3\sigma_1}{12\epsilon_0 d^3} = 8.13\times10^{-6}\ \text{N} \\ |\vec{F}| &= \sqrt{F_x^2+F_y^2} = 5.75\times10^{-5}\ \text{N} \end{aligned}$$

e come si vede la forza è largamente dominata dalla componente x vale a dire dalla componente dovuta alla carica netta Q.

(d) Per il calcolo dell'energia potenziale dobbiamo pure considerare separatamente l'energia dovuta alla carica, $U_Q(y)$ e quella dovuta al momento di dipolo $U_p(y)$. In questo caso effettuiamo il calcolo lasciando libera la coordinata y e fissando $x = d$. Si ha:

$$\begin{aligned} U_Q(y) &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{d^2+y^2}} = \frac{\sigma_0 R^2 q}{4\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{d^2+y^2}} \\ U_p(y) &= -\vec{p}\cdot\vec{E} = -\vec{p}\cdot\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}(\vec{x}+\vec{y}) = -\frac{\sigma_1 R^3 q}{12\epsilon_0}\frac{y}{(d^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Mettendo insieme si ha:

$$U(y) = \frac{qR^2}{4\epsilon_0}\left[\frac{\sigma_0}{\sqrt{d^2+y^2}} - \frac{\sigma_1 R}{3}\frac{y}{(d^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

Soluzione 2

a) Per determinare il coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti utilizziamo la configurazione più semplice. Assumiamo che una corrente i_s scorra nel solenoide in senso antiorario (cioè secondo il verso indicato in figura), dando luogo ad un campo magnetico costante $\vec{B}_s = B\hat{z}$ al suo interno, di modulo pari a $B = \mu_0(N/L)i_s$. Se fissiamo un verso di percorrenza sulla spira pure antiorario, come indicato in figura, il flusso di $\vec{B}_s$ concatenato con la spira $\Phi_b(\vec{B}_s) = Ba^2$ è positivo, da cui ricaviamo M come:

$$M = \frac{\Phi_b(\vec{B}_s)}{i_s} = \frac{\mu_0 N i_s a^2}{L i_s} = \frac{\mu_0 N a^2}{L} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^4 \times (10^{-3})^2}{10^{-1}} = 4\pi \times 10^{-8}\,\mathrm{H} = 1.26 \times 10^{-7}\,\mathrm{H} \tag{1}$$

b) Nella spira scorre la corrente i in verso antiorario generando un campo magnetico $\vec{B}_b$ che a sua volta dà luogo ad un flusso $\Phi_s(\vec{B}_b)$ concatenato con il solenoide pari a $\Phi_s(\vec{B}_b) = Mi$. La corrente indotta sul solenoide i_s, trascurando la sua autoinduzione, è quindi:

$$f_i = -\frac{d\Phi_s(\vec{B}_b)}{dt} = -M\frac{di}{dt} = -Mi_b\omega\cos(\omega t) = R_s i_s \tag{2}$$

da cui:

$$i_s = -\frac{Mi_b\omega}{R_s}\cos(\omega t) \tag{3}$$

All'istante iniziale la corrente ha modulo $|i_s| = 4\pi \times 10^{-5}\,\mathrm{A} = 1.26 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}$. Il segno negativo indica che la corrente ha verso opposto rispetto a quello indicato in figura, scorre cioè in verso orario. Tale risultato è in accordo con la legge di Lenz, in quanto se la corrente della spira scorre in verso antiorario (come avviene all'istante iniziale) il flusso nel solenoide è positivo (in accordo con le convenzioni fissate per il calcolo di M), per cui la corrente indotta si opporrà alla variazione di flusso dando luogo ad un campo indotto sul solenoide diretto come $-\hat{z}$, che richiede una corrente nel solenoide in verso orario.
c) Una corrente costante i_s nel solenoide genera, come detto nel punto a), un campo uniforme $\vec{B}_s = \mu_0(N/\ell)i_s\hat{z}$. Se la spira viene posta in rotazione intorno al suo asse il flusso concatenato con essa al generico tempo t sarà pari a:

$$\Phi_b(\vec{B}_s) = B_n a^2 \tag{4}$$

dove B_n è la componente di $\vec{B}_s$ lungo la normale alla spira, quindi (come si evince dalla figura)

$$B_n = B\cos(\theta) = B\cos(\omega t) = \frac{\mu_0 N i_s}{L}\cos(\omega t) \tag{5}$$

La corrente i_b indotta sulla spira è quindi:

$$f_i = -\frac{d\Phi_b(\vec{B}_s)}{dt} = -\frac{\mu_0 N a^2 i_s}{L}\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = \frac{\mu_0 N a^2 i_s \omega}{L}\sin(\omega t) = R_b i_b \tag{6}$$

da cui

$$i_b = \frac{\mu_0 N a^2 i_s \omega}{L R_b}\sin(\omega t) \tag{7}$$

Al tempo $\bar{t} = \pi/(2\omega)$ tale corrente assume il suo valore massimo i_{max} pari a

$$i_{max} = \frac{\mu_0 N a^2 i_s \omega}{L R_b} = 4\pi \times 10^{-5} A = 1.26 \times 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{8}$$

d) La potenza dissipata nella resistenza R_b della spira è $P = i_b^2 R_b$. Integrando tra $t = 0$ e il tempo $T = 2\pi/\omega$ che la spira impiega a fare una rotazione completa, otteniamo l'energia U dissipata per effetto Joule:

$$U = \int_0^{2\pi/\omega} dt\, i_b^2(t) R_b = R_b i_{max}^2 \int_0^{2\pi/\omega} dt \sin^2(\omega t) = \frac{R_b i_{max}^2}{\omega}\int_0^{2\pi} dx \sin^2(x) = \frac{R_b i_{max}^2 \pi}{\omega} = 5.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \tag{9}$$

dove abbiamo utilizzato il noto risultato:

$$\int_0^{2\pi} dx \sin^2(x) = \int_0^{2\pi} dx \cos^2(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx[\sin^2(x) + \cos^2(x)] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx = \pi \tag{10}$$