

Prova Scritta Elettromagnetismo - 03.02.2023

(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Piacentini)

Esercizio 1

Due condensatori a facce piane e parallele entrambi di superficie $\Sigma = 14.0 \text{ cm}^2$, uno in aria (C_1) e l'altro riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$ (C_2), sono collegati come in figura ad un generatore di differenza di potenziale $V_0 = 2.5 \text{ kV}$. Inizialmente, per entrambi i condensatori la distanza tra le armature è pari a $d = 2.0 \text{ mm}$.

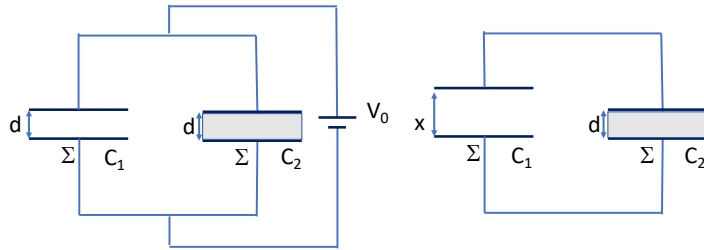
(a) Determinare la carica totale del sistema Q e le densità di carica σ_1 e σ_2 presenti su ciascun condensatore. Dopo che il sistema dei due condensatori è stato sconnesso dal generatore e resta dunque isolato, l'armatura superiore di C_1 diventa mobile mentre quella di C_2 resta fissa. Sia x la generica distanza tra le sue armature di C_1 . Si determini:

(b) le cariche Q_1 e Q_2 sui due condensatori in funzione di x ;

(c) la differenza di potenziale in funzione di x e il suo valore asintotico al crescere di x .

Sapendo che la rigidità dielettrica dell'aria è pari a $E_{r1} = 3 \text{ kV/mm}$ e quella del dielettrico è pari a $E_{r2} = 1.5 \text{ kV/mm}$ si determini

(d) per quali valori di x si hanno scariche in ciascuno dei due condensatori.



Esercizio 2

Si considerino i due circuiti rigidi mostrati in figura di lunghezza $\ell = 1.5 \text{ m}$, e larghezza $d = 0.05 \text{ m}$, con $\ell \gg d$. I circuiti sono separati tra loro da una distanza pari a d . Due generatori ideali mantengono le correnti $i_1 = i_2 = 2.0 \text{ A}$ costanti, nei versi indicati in figura. Si trascurino le resistenze elettriche dei circuiti.

Si determini:

a) La forza tra i due circuiti.

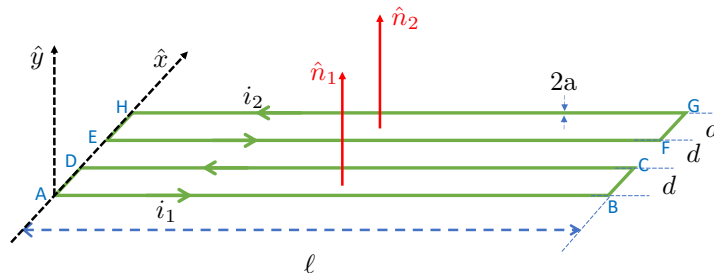
b) Il coefficiente di mutua induzione M_{12} tra i due circuiti. Nel calcolo si orienti ogni circuito in senso antiorario, di modo che le correnti rappresentate in figura siano positive.

c) Il coefficiente di auto induzione L di ciascun circuito. In tal caso si assuma che ciascun tratto di lunghezza ℓ del circuito sia assimilabile ad un cilindro di raggio $a \ll \ell$, con $a = 1.0 \text{ mm}$, e che d sia la distanza tra gli assi dei cilindri. Si assuma inoltre che la corrente scorra sulla superficie esterna dei fili.

d) L'energia magnetica U_m del sistema.

Successivamente, i due generatori di corrente continua vengono eliminati. Al tempo $t = 0$ il circuito 1 viene connesso ad un generatore di corrente sinusoidale $i_1(t) = i_0 \sin(\omega t)$ con $i_0 = 2.0 \text{ A}$

e) si determini l'andamento della corrente $i_2(t)$ che scorre nel circuito 2 per $t > 0$, calcolandone il valore massimo.



Soluzione 1

(a) Le capacità dei due condensatori sono date rispettivamente da:

$$\begin{aligned}C_1 &= \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d} \\C_2 &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\Sigma}{d}\end{aligned}$$

e quella dell'intero sistema è data dal parallelo delle due capacità

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d} (1 + \epsilon_r)$$

e dunque la carica complessiva sarà:

$$Q = CV_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma V_0}{d} (1 + \epsilon_r) = 7.74 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Le densità di carica nei due condensatori sono:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Q_1}{\Sigma} = \frac{C_1 V_0}{\Sigma} = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} = 1.11 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2 \\ \sigma_2 &= \frac{Q_2}{\Sigma} = \frac{C_2 V_0}{\Sigma} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{d} = 4.42 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2\end{aligned}$$

(b) Una volta sconnesso il generatore, la carica complessivamente presente sul sistema resta pari a Q , ma al variare di x , cambia la capacità del condensatore 1 e dunque viene modificata la distribuzione della carica tra i due condensatori. Detta $C_1(x) = \epsilon_0 \Sigma / x$ la capacità del condensatore 1, C_2 la capacità del condensatore 2 che resta immutata e $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ le cariche nei due condensatori, si ha:

$$\begin{aligned}Q_1(x) + Q_2(x) &= Q \\ \frac{Q_1(x)}{C_1(x)} &= \frac{Q_2(x)}{C_2} \Rightarrow Q_2(x) = Q_1(x) \frac{C_2}{C_1(x)} = Q_1(x) \epsilon_r \frac{x}{d} \\ Q_1(x) \left(1 + \epsilon_r \frac{x}{d}\right) &= Q\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}Q_1(x) &= Q \frac{1}{1 + \epsilon_r \frac{x}{d}} \\ Q_2(x) &= Q \frac{\epsilon_r \frac{x}{d}}{1 + \epsilon_r \frac{x}{d}}\end{aligned}$$

(c) La differenza di potenziale del sistema di due condensatori $V(x)$ è data da:

$$V(x) = \frac{Q}{C_1(x) + C_2} = \frac{Qxd}{\epsilon_0 \Sigma (d + x\epsilon_r)} = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma} \frac{x}{1 + \frac{\epsilon_r}{d}x}$$

che per $x \gg d/\epsilon_r = 0.5 \text{ mm}$ tende a $V_{lim} = Qd/(\epsilon_0 \epsilon_r \Sigma) = 3.13 \text{ kV}$.

(d) I campi elettrici dei due condensatori sono:

$$\begin{aligned}E_1(x) &= \frac{V(x)}{x} = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_r}{d}x} \\ E_2(x) &= \frac{V(x)}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma d} \frac{x}{1 + \frac{\epsilon_r}{d}x}\end{aligned}$$

Si hanno scariche quando i campi superano i valori delle rispettive rigidità dielettriche:

$$\begin{aligned}E_1(x) > E_{r1} &\Rightarrow x < \frac{d}{\epsilon_r} \left[\frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma E_{r1}} - 1 \right] = 0.54 \text{ mm} \\ E_2(x) > E_{r2} &\Rightarrow x > \frac{d}{\frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma E_{r2}} - \epsilon_r} = 12.1 \text{ mm}\end{aligned}$$

Soluzione 2

La forza tra due fili di lunghezza ℓ , separati dalla distanza d , e percorsi da corrente i_1 e i_2 vale in modulo

$$|F| = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \ell}{2\pi d}$$

ed è attrattiva se i le correnti sono concordi e repulsiva altrimenti.

Consideriamo quindi la forza che il circuito 1 esercita sul circuito 2. Scegliendo gli assi come in figura, e trascurando il contributo dei tratti AD e BC del circuito 1, e dei tratti EH e FG del circuito 2, abbiamo:

$$\vec{F}_{AB-EF} = -\frac{\mu_0 i^2 i_1 \ell}{2\pi 2d} \hat{x} \quad (1)$$

$$\vec{F}_{AB-HG} = \frac{\mu_0 i^2 i_1 \ell}{2\pi 3d} \hat{x} \quad (2)$$

$$\vec{F}_{DC-EF} = \frac{\mu_0 i^2 i_1 \ell}{2\pi d} \hat{x} \quad (3)$$

$$\vec{F}_{DC-HG} = -\frac{\mu_0 i^2 i_1 \ell}{2\pi 2d} \hat{x} \quad (4)$$

$$(5)$$

Sommando otteniamo la forza totale che il circuito 1 esercita sul 2:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{6\pi d} \hat{x} \Rightarrow |\vec{F}| = 8.0 \times 10^{-6} \text{N}$$

La forza tra i circuiti è repulsiva. La forza per tenere il sistema fermo è in direzione opposta.

b) Per il calcolo del coefficiente di mutua induzione determiniamo il campo magnetico $\vec{B}_1$ che il circuito 1 genera nella zona di spazio dove è presente il circuito 2. Trascurando nuovamente i tratti AD,BC e usando l'espressione del campo magnetico dei fili rettilinei otteniamo:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{DC} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \hat{y} - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(x-d)} \hat{y}, \quad x > d \quad (6)$$

Pertanto orientando il circuito 2 in senso antiorario la normale è diretta come $\hat{y}$ e il flusso di $\vec{B}_1$ concatenato con il circuito 2 vale:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \int_{2d}^{3d} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right) dx = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{3}{4} \right)$$

e il coefficiente di mutua induzione viene:

$$M_{12} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{i_1} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{3}{4} \right) = -0.87 \times 10^{-7} \text{H}$$

Si noti che M_{12} è negativo perchè il campo magnetico risultante (7) è diretto come $-\hat{y}$.

c) Per calcolare il coefficiente di autoinduzione consideriamo i fili come cilindri di spessore a , i cui assi sono centrati in $x = 0$ e $x = d$. Il campo magnetico dovuto ai tratti AB e CD viene quindi:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{DC} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \hat{y} + \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(d-x)} \hat{y}, \quad a < x < d-a \quad (7)$$

Orientando il circuito 1 in senso antiorario la sua normale è diretta come $\hat{y}$ e il flusso di $\vec{B}_1$ concatenato con il circuito 1 vale:

$$\Phi_1(\vec{B}_1) = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a} \right)^2$$

Il coefficiente di autoinduzione vale quindi

$$L = \frac{\Phi_1(\vec{B}_1)}{i_1} = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a} \right) = 23.4 \times 10^{-7} \text{H}$$

d) L'energia magnetica del sistema può essere espressa come somma delle energie magnetiche dei singoli circuiti, e dell'energia connessa alla mutua induzione, che darà un contributo negativo in quanto $M_{12} < 0$. Pertanto avremo:

$$U = \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2 + M_{12}i_1i_2 = (L + M_{12})i^2 = 9.0 \times 10^{-6} \text{ J}$$

e) In assenza di un generatore connesso al circuito 2 la corrente i_2 è dovuta unicamente alla mutua induzione tra i due circuiti. Avremo quindi la seguente equazione:

$$f_i = -\frac{dM_{12}i_1}{dt} = -M_{12}\frac{di_1}{dt} = L\frac{di_2}{dt}$$

Da cui deduciamo che

$$i_2(t) = -\frac{M_{12}i_0}{L} \sin(\omega t) + c = -\frac{M_{12}i_0}{L} \sin(\omega t) = i_{max} \sin(\omega t)$$

dove la costante di integrazione c è stata posta uguale a 0 in quanto $i_2(0) = 0$ A. Il valore massimo della corrente è:

$$i_{max} = -\frac{M_{12}i_0}{L} = 0.074 \text{ A}$$

e viene positiva. Il risultato è in accordo con la legge di Lenz: poichè, come commentato prima, nell'intervallo di tempo in cui $i_1(t) > 0$ il campo $\vec{B}_1$ è diretto come $-\hat{y}$ in corrispondenza del circuito 2, la corrente indotta $i_2(t)$ dovrà generare un campo diretto come $\hat{y}$ per opporsi alla variazione di flusso, per cui i_2 dovrà scorrere in senso antiorario nel circuito 2, cioè in verso concorde all'orientazione scelta come positiva.