Primo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2007/2008

18 Aprile 2008

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

Un condensatore sferico è costituito da una armatura esterna di raggio $R_2 = 1\,cm$ e da una armatura interna di raggio $R_1 = 0.5\,cm$. Il condensatore è in aria (costante dielettrica $\epsilon_r = 1$, rigidità elettrica $E_{max} = 6\,MV/m$).

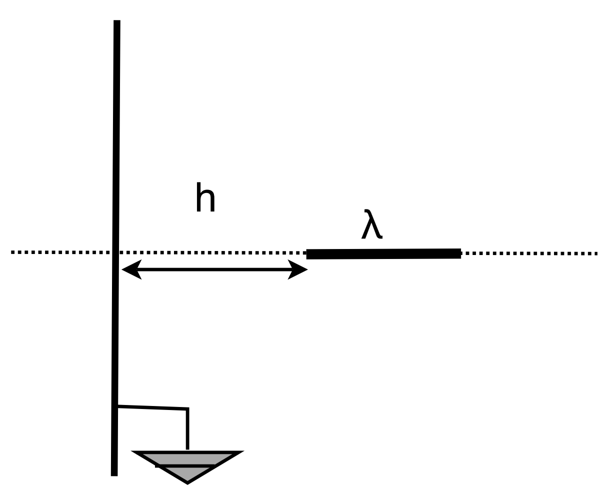
Determinare:

1. l'andamento del campo elettrico, a condensatore carico, in funzione della distanza dal centro del condensatore tracciandone un grafico qualitiativo;
2. supponendo di caricare il condensatore gradualmente dal potenziale zero fino al punto in cui il campo elettrico tra le armature raggiunge in almeno un punto un valore di poco inferiore alla rigidità dielettrica dell'aria, determinare in tali condizioni:
   (a) la d.d.p. tra le armature del condensatore;
   (b) l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

Esercizio 2

Una asticella di materiale isolante di lunghezza L e sezione trascurabile, con densità lineare di carica uniforme λ, è posta di fronte ad un piano conduttore (considerato infinitamente esteso), collegato a massa ($V = 0$), ad una distanza h come mostrato in figura. Determinare:

1. la carica totale Q indotta sul piano conduttore;
2. il campo generato dalla distribuzione di carica indotta sul piano conduttore nei punti dell'asse su cui giace l'asticella;
3. la forza che si esercita tra il piano conduttore e l'asticella;
4. l'espressione della densitá di carica supeficiale σ indotta sul piano conduttore.



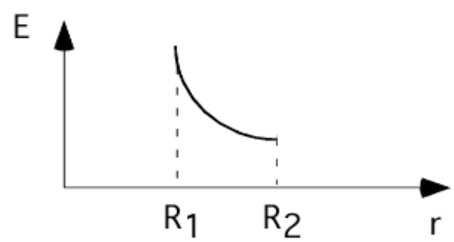
Soluzione

Esercizio 1

1) Il condensatore sferico carico ha una carica positiva Q_+ presente sull'armatura interna e la stessa carica di segno opposto Q_- sulla superficie interna del guscio esterno. Applicando il teorema di Gauss alla generica superficie sferica di raggio r concentrica con le altre sfere, deduciamo che

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad r \in [R_1, R_2]$$

Se la carica totale del sistema è nulla, $Q_+ + Q_- = 0$, allora l'andamento della componente radiale del campo elettrico in funzione della distanza r dal centro delle sfere è quello riportato nella seguente figura:



2-a) Il campo elettrico è massimo in prossimità dell'armatura interna di raggio R_1. Quando $E(R_1) = E_{max}$ si ha:

$$Q_{max} = 4\pi\epsilon_0 R_1^2 E_{max};$$

per cui:

$$V_{max} = \frac{Q_{max}}{C} = \frac{Q_{max}}{\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}} = E_{max} R_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) = 1.5 \cdot 10^4\, V.$$

2-b) L'energia elettrostatica è:

$$U_{max} = \frac{1}{2} C V_{max}^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} E_{max}^2 R_1^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_2^2} = 2\pi\epsilon_0 E_{max}^2 R_1^3 \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} = 1.25 \cdot 10^{-4}\, J.$$

Esercizio 2

1) Poichè siamo nelle condizioni di induzione totale, la carica totale indotta sul piano conduttore ha modulo uguale, ma segno opposto, a quello della carica complessivamente posseduta dall'asticella: $Q = -\lambda L$.

2) Fissiamo il sistema di riferimento con asse x perpendicolare al piano conduttore e passante per l'asticella carica, ed origine posta sul punto di intersezione tra il piano conduttore e l'asse x. Per risolvere il problema applichiamo il metodo della carica immagine: il contributo al campo elettrico della carica indotta sul piano conduttore è equivalente a quella di una seconda asticella (virtuale), di stessa lunghezza dell'asticella reale, e densità $-\lambda$, posta simmetricamente rispetto al piano $x = 0$. Seguendo questa strategia, si deduce facilmente che le componenti del campo ortogonali all'asse x devono essere nulle e l'unica componente diversa da zero del campo si può scrivere:

$$E_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-h-L}^{-h}\frac{(-\lambda dx')}{(x-x')^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{(h+x)} + \frac{1}{(h+x+L)}\right)$$

in un punto dell'asse x che si trovi a distanza x dal piano conduttore.

3) Indicando con dx' l'elemento infintesimo dell'asticella reale, la forza risultante su quest'ultima é data dall'integrale esteso da h ad $h+L$ della densità di carica per il campo prodotto dall'asticella immagine, calcolato al punto 2) (nota: $F_y = F_z = 0$):

$$F_x = \int_h^{h+L}\lambda E_x(x')dx' = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\int_h^{h+L} dx'\left[\frac{1}{x'+h+L} - \frac{1}{x'+h}\right] = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{1+\frac{L}{h}}{(1+\frac{L}{2h})^2}\right)$$

Notiamo che $\left(1+\frac{L}{2h}\right)^2$ è sempre maggiore di $\left(1+\frac{L}{h}\right)$, di conseguenza la forza risulta sempre di segno negativo, cioè attrattiva.

4)Il campo elettrico in ciascun punto del semi-spazio in cui è situata l'asticella carica , è dato dalla somma vettoriale dei campi dovuti all'asticella reale e a quella immagine. Sul piano $x = 0$ il campo elettrico ha componenti y e z nulle, mentre la componente x (ortogonale al piano) è pari a due volte il contributo dell'asticella reale :

$$E_x(0,y,z) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\int_h^{L+h}\frac{\lambda(-x')dx'}{(x'^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{[(h+L)^2+R^2]^{1/2}} - \frac{1}{[h^2+R^2]^{1/2}}\right]$$

avendo posto $R^2 = y^2 + z^2$.

Applicando poi il teorema di Coulomb, otteniamo la densità superficiale di carica indotta sul piano conduttore:

$$\sigma(R) = \epsilon_0 E_x(0,R) = \frac{\lambda}{2\pi}\left\{\frac{1}{(R^2+(L+h)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R^2+h^2)^{1/2}}\right\}.$$