Terzo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2007/2008

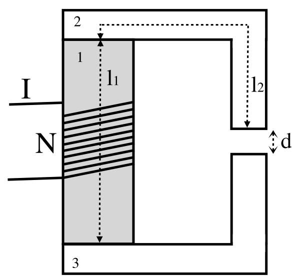
13 Giugno 2008

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

Un elettromagnete è costituito da una sbarra (1 in figura) di materiale ferromagnetico di sezione $\Sigma_1 = 70\ cm^2$, lunghezza media $l_1 = 1\ m$, e permeabilità magnetica costante $\mu_{r1} = 10^2$; e da due ancore in materiale ad alta permeabilità magnetica (2, 3 in figura) di eguale lunghezza media $l_2 = 1.5\ m$ e sezione $\Sigma_2 = 30\ cm^2$, con permeabiltà magnetica costante $\mu_{r2} = 10^5$. Le due ancore delimitano un traferro in aria di spessore piccolo rispetto alle dimensioni lineari del circuito magnetico, e l'elettromagnete è alimentato tramite $N = 250$ spire percorse da una corrente continua $I = 10\ A$ mantenuta costante da un generatore esterno. Determinare:

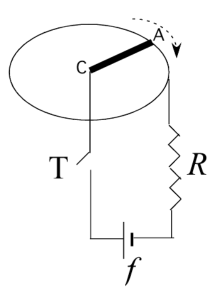
1. il valore della riluttanza totale del sistema quando lo spessore del traferro è $d = 3\ cm$.
2. l'espressione dei campi **H** e **B** nella sbarra 1 e nel traferro, calcolando esplicitamente il valore numerico di B nel traferro
3. il valore della forza con cui si attraggono le due espansioni polari del magnete quando il traferro in aria è di spessore $d = 3\ cm$.



Esercizio 2

Nel circuito in figura, l'anello circolare conduttore di raggio $d = 10cm$ e' fisso, e disposto ortogonalmente alle linee di forza di un campo di induzione magnetica $B = 1Wb/m^2$ costante. L'asticella conduttrice CA, di massa $m = 30gr$ é libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per C e tocca con l'altro estremo (A) l'anello. Alla chiusura del tasto T, la pila di f.e.m. $f = 5V$ fa passare corrente attraverso la resistenza $R = 4\Omega$ nella asticella CA inizialmente ferma. Trascurando la resistenza dell'asticella e dell'anello, e l'autoinduzione del circuito, e denotando con $\omega(t)$ la velocita' angolare di rotazione dell'asticella ad un dato istante t, trovare:

1. le relazioni che descrivono la dipendenza della corrente e del momento di forze risultante agente sull'asticella dal valore di $\omega(t)$ ad un generico istante t
2. la relazione che descrive la dipendenza di ω da t (si ricorda che l'espressione del momento di inerzia di una asticella rispetto ad un asse passante per una sua estermitá é $md^2/3$)
3. il valore limite di ω
4. l'energia spesa dal generatore nel tempo che va dalla chiusura del tasto T al raggiungimento del valore limite di ω



Soluzione Esercizio 1

1) Elementi magnetici in serie:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_0 = \frac{l_1}{\mu_0\mu_{r1}\Sigma_1} + \frac{2l_2}{\mu_0\mu_{r2}\Sigma_2} + \frac{d}{\mu_0\Sigma_2} \simeq \frac{\Sigma_2 l_1 + \mu_{r1}\Sigma_1 d}{\mu_0\mu_{r1}\Sigma_1\Sigma_2} = 9.1\times 10^6\ H^{-1} \tag{1}$$

(Notare che dato l'altissimo valore della permeabilità magnetica del ferro dolce il contributo alla riluttanza delle due ancore può essere trascurato)

2) Circuito magnetico: $\phi = \frac{F}{R} = \frac{NI}{R}$, da cui:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\phi}{\Sigma_1} = \frac{NI}{R\Sigma_1} \simeq \frac{NI\mu_0\mu_{r1}\Sigma_2}{l_1\Sigma_2 + \mu_{r1}\Sigma_1 d} = 3.9\times 10^{-2}\ T \\ B_0 &= \frac{\phi}{\Sigma_2} = \frac{NI}{R\Sigma_2} \simeq \frac{NI\mu_0\mu_{r1}\Sigma_1}{l_1\Sigma_2 + \mu_{r1}\Sigma_1 d} = 9.2\times 10^{-2}\ T \end{aligned} \tag{2}$$

per i campi H si usa la relazione $H = \frac{B}{\mu}$, per cui:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_{r1}} \simeq 3.1\times 10^2\ \frac{A}{m};\ H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \simeq 7.3\times 10^5\ \frac{A}{m}$$

3) Il generatore mantiene costante la corrente nel circuito per cui possiamo ottenere l'espressione della forza esercitata tra le espansioni polari come:

$$F = +\frac{\partial U_M}{\partial x}$$

avremo (indicando con x la distanza tra le espansioni polari):

$$\begin{aligned} U_M(x) = \int u_M d\tau &= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{B_1^2 l_1\Sigma_1}{\mu_{r1}} + 2\frac{B_2^2 l_2\Sigma_2}{\mu_{r2}} + B_0^2 x\Sigma_2\right) = \\ &= \frac{\phi^2}{2\mu_0}\left(\frac{l_1}{\mu_{r1}\Sigma_1} + 2\frac{l_2}{\mu_{r2}\Sigma_2} + \frac{x}{\Sigma_2}\right) = \\ &= \frac{\phi^2 R}{2} = \frac{(NI)^2}{2R} \end{aligned} \tag{3}$$

da cui:

$$\frac{\partial U_M}{\partial x} = \frac{(NI)^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{(NI)^2}{2R^2}\frac{\partial R(x)}{\partial x} = -\frac{(NI)^2}{2R^2}\frac{1}{\mu_o\Sigma_2} = -\frac{1}{2}\frac{B_0(x)^2}{\mu_0}\Sigma_2 \tag{4}$$

per cui:

$$F = \frac{\partial U_M}{\partial x}|_{x=d} = -\frac{1}{2}\frac{B_0(d)^2}{\mu_0}\Sigma_2 = -10\ N \tag{5}$$

Soluzione Esercizio 2

1) Per la variazione del flusso si trova facilmente

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{Bd^2}{2}\omega$$

e quindi per la corrente si ha

$$i = \frac{1}{R}\left(f - \frac{Bd^2}{2}\omega\right)$$

Il passaggio di corrente nell'asticella, alla luce della presenza del campo di induzione magnetica, dá luogo ad un momento di forze dato da

$$M = \int_0^d B\,i\,r\,dr = \frac{Bd^2}{2R}\left(f - \frac{Bd^2}{2}\omega\right)$$

2) Alla luce del risultato ottenuto al punto precedente sul momento di forze risultate (e tenendo conto del fatto che il momento di inerzia di una asticella rispetto ad un asse passante per una sua estermitá é $md^2/3$) troviamo

$$\frac{md^2}{3}\frac{d\omega}{dt} = \frac{Bd^2}{2R}\left(f - \frac{Bd^2}{2}\omega\right)$$

le cui soluzioni sono del tipo

$$\omega = -\frac{2f}{Bd^2}e^{-\frac{3B^2d^2t}{4mR}} + costante$$

La costante di integrazione é determinata dal dato del problema che fissa $\omega = 0$ per $t = 0$ e quindi

$$\omega = \frac{2f}{Bd^2}\left(1 - e^{-\frac{3B^2d^2t}{4mR}}\right)$$

3) Dal risultato ricavato al punto precedente si evince che il valore limite di ω é

$$\omega_\infty = \frac{2f}{Bd^2} = 1000\ \frac{rad}{s}$$

4) Nel calcolo dell'energia spesa dal generatore tra $t = 0$ e $t = \infty$ si identificano due contributi: energia dissipata nella resistenza ed energia cinetica acquisita dall'asticella. Il risultato complessivo é

$$W = \frac{1}{2}\frac{md^2}{3}\omega_\infty^2 + \int_0^\infty R\,i^2\,dt = \frac{md^2}{3}\omega_\infty^2 = 100\ J$$