

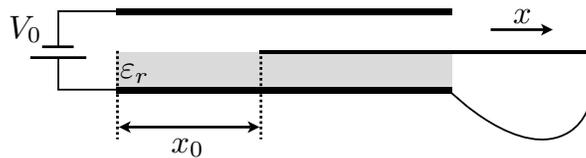
Compito d'esonero del corso di Elettromagnetismo del 28-5-2010

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Esercizio 1

Un condensatore ad armature quadrate piane e parallele, di lato $l = 25$ cm e distanti tra loro $d = 1$ cm, è riempito per metà da un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$. Sul dielettrico è poggiata una lastra quadrata conduttrice di lato l , massa $m = 50$ g e di spessore trascurabile. La lastra è connessa ad una delle due armature del condensatore mediante un filo conduttore ed è vincolata a muoversi nella direzione x (vedi figura). Il condensatore è collegato ad una generatore di forza elettromotrice $V_0 = 10$ kV. Calcolare

- la capacità totale del sistema quando la lastra è nella posizione iniziale $x_0 = 10$ cm,
- la componente x della forza che agisce sulla lastra mobile nella condizione iniziale $x = x_0$,
- la velocità massima della lastra e la corrispondente posizione, assumendo nulla la velocità iniziale e trascurando gli attriti,
- la forza applicata alla lastra nel caso in cui la lastra sia collegata all'armatura superiore del condensatore.

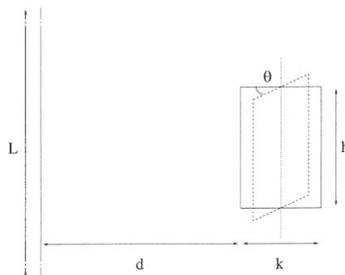


Esercizio 2

Un filo rettilineo in ferro, di resistività $\rho = 8.6 \cdot 10^{-8} \Omega m$, ha lunghezza $L = 7.0 m$, sezione circolare con raggio $r = 1.0$ mm ed è percorso da una corrente $I_f = 23 A$. Una spira rettangolare, con lati $h = 3.0$ cm e $k = 2$ cm, è disposta con i lati maggiori paralleli al filo ed è percorsa da una corrente $I_s = 3.8$ A. I_s scorre nel lato della spira più vicino al filo con il verso concorde a quello della corrente I_f . La spira può ruotare intorno ad un asse passante per il suo centro, anch'esso parallelo al filo. Inizialmente la spira si trova sullo stesso piano del filo, con il lato più vicino a distanza $d = 18$ cm da esso. Successivamente la spira viene ruotata di un angolo $\theta = \pi/6$.

Si calcoli

- la forza elettromotrice che produce la corrente I_f nel filo;
- la forza complessiva che agisce sulla spira nella posizione iniziale;
- il momento che agisce sulla spira nella posizione finale valutandolo nella approssimazione di dipolo magnetico;
- il lavoro necessario per ruotare la spira dalla posizione iniziale a quella finale, usando la approssimazione di dipolo magnetico.



SOLUZIONI

Esercizio 1

La porzione di condensatore senza lastra è equivalente alla serie di due condensatori con capacità equivalente pari a:

$$C_1(x) = \frac{2\varepsilon_0 l x}{d} \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}$$

la restante parte del condensatore ha invece capacità:

$$C_2(x) = \frac{2\varepsilon_0 l(l-x)}{d}$$

La capacità del sistema complessivo è data dal parallelo di C_1 e C_2 :

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \frac{2\varepsilon_0 l}{d} \left(l - \frac{x}{\varepsilon_r + 1} \right)$$

a) Nella posizione iniziale $x = x_0$ la capacità del sistema vale:

$$C(x_0) = 100 \text{ pF}$$

b) La componente x della forza si ottiene derivando l'energia elettrostatica del sistema mantenendo la tensione costante:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C(x)V_0^2}{2} \right) = \frac{V_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} C(x) = \\ &= -\frac{\varepsilon_0 V_0^2 l}{d} \frac{1}{\varepsilon_r + 1} = -5.5 \text{ mN} \end{aligned}$$

c) Trascurando gli attriti, il lavoro compiuto dalla forza di risucchio viene totalmente convertito in energia cinetica. La massima velocità si avrà quando la lastra è totalmente inserita $x_0 = 0$ e cioè prima che la forza cambi segno:

$$L = -F_x x_0 = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

da cui

$$v_{max} = \sqrt{\frac{-2F_x x_0}{m}} = 0.15 \text{ m/s}$$

d) Quando la lastra viene collegata all'armatura superiore $C_2(x)$ diventa:

$$C_2(x) = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_r l(l-x)}{d}$$

che sostituita nell'espressione di $C(x)$ e derivata fornisce una forza:

$$F_x = -\frac{\varepsilon_0 V_0^2 l}{d} \frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r + 1} = -50 \text{ mN}$$

Esercizio 2

(a) dai dati del problema si deduce che la resistenza del filo é

$$R = \frac{\rho L}{\pi r^2} = 0.19 \quad \Omega$$

e quindi la forza elettromotrice deve avere il valore

$$V = RI_f = 4.4 \quad V$$

(b) A distanza δ dal filo il campo di induzione magnetica prodotto dalla corrente I_f del filo ha modulo

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi \delta}$$

La forza che agisce sulla spira dovuta alla presenza di questo campo di induzione magnetica si annulla complessivamente sui lati minori, mentre sui lati maggiori nella configurazione iniziale la forza é diretta verso il filo, con modulo

$$F = hI_s B(d) - hI_s B(d+k) = hI_s \frac{\mu_0 I_f}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+k} \right) = 2.9 \cdot 10^{-7} \quad N$$

(c) Nella approssimazione di dipolo magnetico si trova

$$M = m_s B \left(d + \frac{k}{2} \right) \text{sen} \frac{\pi}{6} = I_s h k \frac{\mu_0 I_f}{2\pi \left(d + \frac{k}{2} \right)} \text{sen} \frac{\pi}{6} = 2.8 \cdot 10^{-8} \quad Nm$$

in cui si é usato il fatto che il momento di dipolo magnetico della spira ha modulo

$$m_s = I_s h k = 2,3 \cdot 10^{-3} \quad A \cdot m^2$$

(d) Nella approssimazione di dipolo magnetico la differenza di energia tra la configurazione iniziale e quella finale é data dalla differenza dei corrispondenti valori di $U = -\vec{m}_s \cdot \vec{B}$:

$$\Delta U = U_f - U_i = -m_s B \left(d + \frac{k}{2} \right) \cos \frac{\pi}{6} + m_s B \left(d + \frac{k}{2} \right) = I_s h k \frac{\mu_0 I_f}{2\pi \left(d + \frac{k}{2} \right)} \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right) = 7.4 \cdot 10^{-9} \quad J$$

ed il lavoro necessario per ruotare la spira dalla posizione iniziale a quella finale é proprio pari a ΔU .