Compito d'esonero del corso di ELETTROMAGNETISMO
n. 1 - *15/04/2011 - a.a. 2010/2011*
proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

ESERCIZIO 1

Una distribuzione di carica a simmetria sferica si estende in tutto spazio con densità di carica di volume ρ variabile con la distanza r dal centro O della distribuzione, secondo la legge $\rho = K \exp[-\frac{r}{r_o}]$ dove $r_o = 1.0$ cm.

a) Si determini il valore della costante K sapendo che la carica complessiva della distribuzione è $Q = 0.3$ μC

b) Si ricavi l'andamento dell'intensità del campo elettrico in funzione di r e se ne calcoli il valore nel punto P posto a $r = 20$ cm dal centro O.

c) Si calcoli il lavoro che occorre compiere per portare la carica $q = 1.0$ nC dall'infinito al punto P.

PS. Si noti che applicando la regola di integrazione per parti si ottiene: $\int e^{-x}x^2 dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$. *Per il calcolo del lavoro si suggerisce inoltre di sfruttare l'identità* $\int \frac{e^{-x}}{x} dx = -\left(\frac{e^{-x}}{x} + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx\right)$

ESERCIZIO 2

Su un piccolo disco di raggio $R = 1.0$ mm e di spessore trascurabile, è depositata una carica con densità superficiale $\sigma(r, \phi) = \alpha\ r\ cos\phi$ dove α è costante e r e ϕ sono le variabili rappresentate in figura. Il disco è per metà carico positivo e per l'altra metà carico negativo. Le cariche positiva e negativa depositate sul disco sono in modulo pari a $Q = 1.0 \cdot 10^{-5}$ C. Si chiede

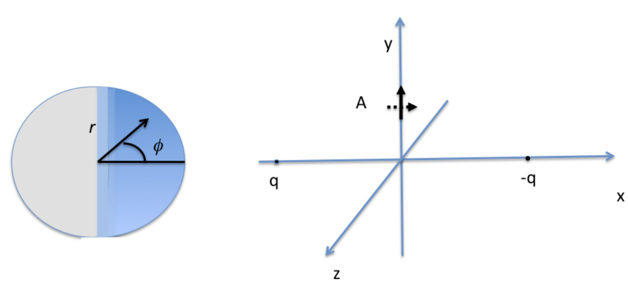
a) di determinare il momento di dipolo elettrico del disco.

Il disco, col dipolo orientato nella direzione dell'asse y, viene posizionato nel punto A di coordinate $(0, a, 0)$, con $a = 1.0$ cm, nel campo elettrico formato da una carica puntiforme $q = 1.0 \cdot 10^{-3}$ C posta nel punto $(-d, 0, 0)$, con $d = 10$ cm, e da una carica $-q$ posta nel punto di coordinate $(d, 0, 0)$.

b) Si determini il momento meccanico agente sul disco

Mantenendo il dipolo nello stesso punto A, lo si disponga parallelo all'asse x .

c) In questa nuova orientazione del dipolo si determini il valore ed il segno della sola componente y della forza agente su di esso.



Soluzioni

Esercizio 1

a) La carica totale Q è ricavabile calcolando in coordinate sferiche l'integrale di volume di ρ esteso a tutto lo spazio

$$Q = \int_0^{\infty} \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi K \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{r_o}} r^2 dr = 4\pi K r_o^3 \int_0^{\infty} e^{-x} x^2 dx$$

dove $x = \frac{r}{r_o}$ Integrando per parti si ha

$$\int e^{-x} x^2 dx = -\big(e^{-x}(x^2 + 2x + 2\big)$$

che, calcolato all'infinito è nullo mentre per $x = 0$ è pari 2. Si ottiene quindi

$$K = \frac{Q}{8\pi r_o^3} = 1.2 \cdot 10^{-2} \quad C/m^3$$

b) Sfruttando la simmetria sferica della distribuzione di carica, ricaviamo il campo applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di centro O e raggio r. Utilizzando la solito la variabile ridotta $x = r/r_o$ abbiamo

$$E\ 4\ \pi\ x^2\ r_o^2 = \frac{1}{\epsilon_o} \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \frac{Q}{\epsilon_o}\big[1 - e^{-x}(\frac{1}{2}x^2 + x + 1)\big]$$

da cui si ricava

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_o^2} \frac{1}{x^2}\big[1 - e^{-x}(\frac{1}{2}x^2 + x + 1)\big]$$

e

$$E(r = 0.2) = 6.7 \cdot 10^4 \quad V/m$$

c) Il lavoro compiuto è

$$L = q \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dl} = q\ r_o \int_x^{\infty} E(x') dx'$$

Sostituendo la relazione ricava in precedenza si ha:

$$L = \frac{Q\ q}{4\pi\epsilon_0 r_o}\big\{ \int_x^{\infty} x'^{-2} dx' - \frac{1}{2}\int_x^{\infty} e^{-x'} dx' - \int_x^{\infty} \frac{e^{-x'}}{x'} dx' - \int_x^{\infty} \frac{e^{-x'}}{x'^2} dx' \big\}$$

Si noti che l'integrazione per parti del terzo integrale semplifica l'espressione complessiva sopra riportata. Infatti si ha

$$-\int \frac{e^{-x'}}{x'} dx' = \frac{e^{-x'}}{x'} + \int \frac{e^{-x'}}{x'^2} dx'$$

e ci consente di concludere

$$L = \frac{Q\ q}{4\epsilon_0 \pi r_o} \{ \frac{r_o}{r} - e^{-\frac{r}{r_o}} (\frac{r_o}{r} + \frac{1}{2}) \}$$

e quindi

$$L(r = 0.2) = 1.35 \cdot 10^{-5} \quad J$$

.

Esercizio 2

La carica totale positiva (o negativa) depositata sul semidisco è:

$$Q = \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma(r) r dr d\varphi = \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha r^2 cos\varphi dr d\varphi = \frac{2}{3}\alpha R^3$$

e quindi:

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{Q}{R^3} = 1.5 \cdot 10^4 \quad C/m^3$$

.

Il momento di dipolo calcolato lungo l'asse di simmetria della carica (vedi figura) è:

$$P = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma(r)(r cos\varphi) r dr d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \alpha r^3 cos^2\varphi dr d\varphi = \frac{\alpha\pi R^4}{4} = \frac{3\pi}{8} QR = 1.2 \cdot 10^{-8} \ C\, m$$

Il potenziale generato dalle due cariche q e $-q$ è:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{-q}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Il campo elettrico ha componenti:

$$E_{0x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{-(x-d)}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x+d)}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$E_{0y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{y}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-y}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$E_{0z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-z}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Sul piano $x = 0$ il campo ha non nulla la sola componente x e nel punto A:

$$E_{0x}(0,a,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2d}{[d^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

e quindi il momento delle forze agente sul dipolo orientato $\vec{P}(0,P,0)$ è:

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}_0 = -\frac{3}{16} \cdot \frac{qQR}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{d}{[d^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{z}$$

di modulo

$$M = 21 \ \ N \ m$$

Come è facile verificare la forza agente sul dipolo orientato $\vec{P}(P, 0, 0)$ ha non nulla la sola componente F_y

$$F_y = (P_x \frac{\partial}{\partial y}) E_{0x} = -\frac{qP}{4\pi\epsilon_0} \frac{6ad}{[d^2 + a^2]^{\frac{5}{2}}} = -62 \ \ N$$

che, per l'orientamento assegnato di $\vec{P}$, risulta negativa.