Terza prova d'esonero del corso di Elettromagnetismo - a.a. 2011/12 - 8/6/2012

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

ESERCIZIO 1

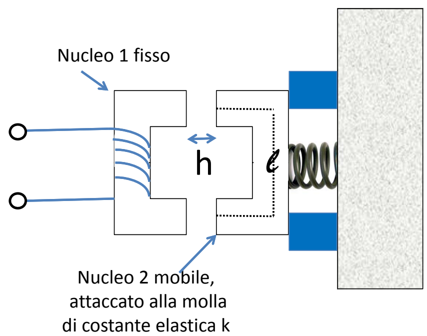
Due nuclei di permeabilità magnetica costante $\mu_r = 1000$ e di uguale geometria sono posti uno di fronte all'altro come mostrato in figura. Uno di essi (a sinistra nella figura) è fisso e su di esso sono avvolte $N = 400$ spire di un filo conduttore.Nella *configurazione iniziale*, quando non fluisce corrente elettrica nell'avvolgimento, il secondo nucleo è trattenuto in contatto con degli appoggi fissi, ad una distanza h=4 mm dal primo nucleo, da una molla di costante elastica $k = 1.0\ N/m$ che esercita una forza di modulo $F_{in} = 1.0\ N$. Successivamente, nella *configurazione finale*, il nucleo mobile si porta in contatto con il nucleo fisso. Sapendo che la lunghezza media di ogni nucleo è $l = 15\ cm$ e la sezione $S = 1.0\ cm^2$, si chiede di calcolare:

a) il modulo della induzione e del campo magnetici nei due nuclei e nel traferro in funzione della corrente i che circola nell'avvolgimento e della posizione;

b) la minima corrente necessaria per mettere in movimento il nucleo mobile;

c) la minima corrente necessara per mantenere il nucleo mobile a contatto con quello fisso;

d) l'espressione della differenza di energia magnetica fra la configurazione finale e quella iniziale, supponendo che la corrente i venga mantenuta costante durante lo spostamento.



ESERCIZIO 2

Un lungo filo di rame é avvolto uniformemente su un rocchetto cilindrico di raggio $R = 1.0\ cm$ e permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 150$. L'avvolgimento forma così un solenoide con un numero di spire per unità di lunghezza $n = 500\ spire/m$; esso é percorso da una corrente $i = 1.5\ A$ mantenuta costante tramite un opportuno generatore di corrente.

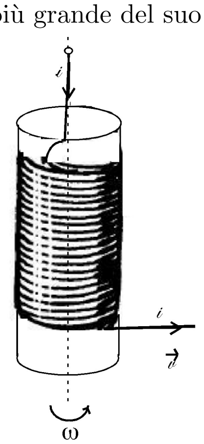
Applicando una forza all'estremo libero del filo di rame, il rocchetto ruota in senso opposto all'avvolgimento ed il filo inizia a svolgersi. Supponendo che la rotazione del rocchetto avvenga a velocità angolare costante $\omega = 36\ rad\ s^{-1}$, calcolare:

a) la forza elettromotrice indotta presente ai capi del solenoide ;

b) la quantità totale di energia che il generatore deve mettere in gioco in un giro del rocchetto;

c) la variazione d'energia entro il solenoide dopo 10 giri.

Si supponga che la lunghezza del solenoide sia molto più grande del suo raggio.



Soluzioni della prova scritta

Esercizio 1

a)

Quando i traferri sono alla generica distanza x, applicando il teorema della circuitazione di Ampère si ha

$$2lH + 2xH_o = N\ i \tag{1}$$

dove $H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$ è il campo magnetico nel materiale ad alta permeabilità magnetica e B il campo d'induzione magnetica.$H_0 = \frac{B}{\mu_0}$ sono i corrispondenti campi nei traferri. Tenendo conto delle relazioni precedenti ed essendo $B = B_0$, esprimiamo H e H_0 in funzione di B ottenendo quindi:

$$B = B_0 = \mu_o \frac{N\ i\ \mu_r}{2l + 2x\mu_r} \qquad H = \frac{N\ i}{2l + 2x\mu_r} \qquad H_0 = \frac{N\ i\ \mu_r}{2l + 2x\mu_r} \tag{2}$$

dove con x si e' indicata la distanza del nuleo mobile dal nucleo fisso.

b)

L'energia magnetica totale del sistema é:

$$U_m = \frac{1}{2} BH\ 2lS + \frac{1}{2} B_0 H_0\ 2xS = \frac{\mu_o \mu_r S N^2 i^2}{4(l + \mu_r x)}$$

La forza magnetica é dedotta calcolando la derivata di U_m rispetto ad x:

$$F_m(x) = \frac{dU_m}{dx} = -\frac{\mu_o \mu_r^2 S N^2 i^2}{4\big(l + \mu_r x\big)^2}$$

in cui il segno meno corrisponde al fatto che la forza agente sul nucleo mobile é diretta dal nucleo mobile al nucleo fisso, cioé é attrattiva (segno opposto alla direzione dell'asse x).

Imponendo la condizione per iniziare a muovere il nucleo attaccato alla molla

$$F_m(x = h_o) > F_{molla}(x = h_o) = 1.0\ N$$

deduciamo la corrente inizialmente necessaria:

$$i_{in} = \frac{2(l + \mu_r h_o)}{N \mu_r} \sqrt{\frac{F_{molla}(x = h_o)}{\mu_0 S}} = 1.85\ A$$

Analogamente , imponendo:

$$F_m(x = 0) > F_{molla}(x = 0) = F_{molla}(x = h_o) + kh$$

deduciamo la corrente necessaria per mantenere la condizione finale

$$i_{fin} = \frac{l}{\mu_r} \frac{2}{N} \sqrt{\frac{F_{molla}(x = h_o) + kh_o}{\mu_0 S}} = 6.7 \cdot 10^{-2}\ A$$

c)

La variazione di energia magnetica tra stato iniziale e finale è

$$U_m(x = h) - U_m(x = 0) = -\frac{1}{4}\mu_o\mu_r^2 S\ N^2 i^2 \frac{h}{l}\frac{1}{l + h\mu_r}$$

Esercizio 2

a) Nell'approssimazione in cui il solenoide può essere trattato di lunghezza infinita, Il flusso del campo d'induzione magnetica è

$$\Phi(\vec{B}) = \mu_o\mu_r n\ iN(t)\pi R^2$$

Segue che la forza elettromotrice autoindotta f_a é:

$$f_a = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{dN(t)}{dt}\pi R^2\mu_o\mu_r n\ i = \frac{\omega}{2}R^2\mu_o\mu_r n\ i = 0.25\ mV$$

essendo

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{\omega}{2\pi} = -5.7\ spire/s$$

b) La potenza erogata dal generatore compensa le perdite per effetto Joule $W_J = i^2 r$, dove r é la resistenza complessiva del circuito. Questa quantità resta costante nel tempo, essendo $i = costante$, indipendentemente dalla presenza di una forza elettromotrice autoindotta. Inoltre, per compensare l'effetto della forza elettromotrice autoindotta durante la rotazione del solenoide, il generatore deve mettere in gioco un ulteriore contributo di potenza. Tale parte è anch'essa costante:

$$\Delta W_g = -f_a\ i = -\frac{\omega}{2}R^2\mu_o\mu_r n i^2 = -0.38\ mW$$

Quindi la variazione di energia del generatore ad ogni periodo di rotazione T è: $T = 2\pi/\omega$=0.17 s, é:

$$\Delta U_g = -\Delta W_g\ T = \pi R^2\mu_o\mu_r n i^2 = 6.5 \cdot 10^{-5} J = 65\ \mu J$$

c) La variazione di energia magnetica U_m puó essere calcolata ricordando che ad ogni giro, a corrente costante, si ha $\Delta U_m = -\Delta U_g/2$, ovvero ricordiamo che l'energia magnetica é:

$$U_m = \frac{1}{2}i^2 L$$

dove $L = \mu_0\mu_r\pi R^2 nN$ è l'induttanza del solenoide. Quindi la differenza d'energia tra la configurazione finale e iniziale è proporzionale alla differenza delle induttanze del solenoide dopo 10 giri, corrispondenti a $\Delta N = -10$ spire:

$$L(t + 10T) - L(t) = \mu_0\mu_r\pi R^2 n\Delta N$$

quindi

$$\Delta U_m = \frac{1}{2}i^2\mu_0\mu_r\pi R^2 n\Delta N = -0.33\ mJ$$