Prova scritta di Elettromagnetismo A.A. 2012/2013

10 Maggio 2013

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

Due condensatori piani di ugual dimensioni hanno capacità $C_o = 2.47\ \mu F$ quando tra le armature vi è il vuoto. Essi vengono riempiti con due sostanze diverse non perfettamente isolanti aventi costanti dielettriche relative $\epsilon_{r1} = 2.75$, $\epsilon_{r2} = 3.84$ e resistività $\rho_{r1} = 4.25 \cdot 10^{11}\ \Omega m$, $\rho_{r2} = 3.84 \cdot 10^{11}\ \Omega m$. I due condensatori, posti in serie, sono collegati ad un generatore di forza elettromotrice $f = 125\ V$. Trascurando la resistenza interna del generatore si calcoli:

1) il valore della corrente che circola nel circuito in regime di assoluta stazionarietà,
2) i valori delle cariche elettriche localizzate sulle armature dei due condensatori,
3) i valori delle cariche di polarizzazione nei due condensatori,
4) l'energia immagazzinata nel circuito e la potenza dissipata in condizioni stazionarie.

Esercizio 2

Un fascio è costituito da protoni (massa $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$g, carica $e = 1.60 \cdot 10^{-19}\ C$), tutti in moto rettilineo uniforme con la stessa velocità $\vec{v}$ supposta costante. Il fascio ha sezione circolare di raggio $R = 5\ cm$ e densità n uniforme.

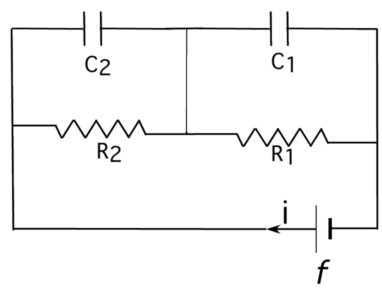
a) Si ricavino le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico prodotti dal fascio, in funzione della densità n, della velocità v e della distanza r dell'asse del fascio.

b) Si determini il valore della della corrente trasportata dal fascio, se il rapporto fra i moduli dei campi elettrico e magnetico vale $E_o/B_o = 1.5 \cdot 10^{10}\ C\ m\ s^{-1}$ e il campo elettrico, alla distanza $r^* = 3.0\ cm$ dall'asse del filo, ha modulo $E_0^* = E(r^*) = 2.75 \cdot 10^6 V\ m^{-1}$.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1

1)
Il circuito equivalente del sistema dei due condensatori reali posti in serie è mostrato in figura.



In condizioni di assoluta stazionarietà si ha moto di carica solo attraverso le due resistenze in serie R_1 e R_2. Ne consegue che la corrente elettrica I è

$$I = \frac{f}{R_1 + R_2} \tag{1}$$

Le resistenze sono deducibili dalla relazione

$$C_i R_i = \epsilon_o \epsilon_{ri} \rho_{ri}$$

e, poichè $C_i = \epsilon_{ri} C_o$. essendo l'indice i=1,2 allora

$$R_i = \rho_{ri} \frac{\epsilon_o}{C_o} \tag{2}$$

Dalle equazioni 1 e 2 deduciamo

$$I = \frac{f}{\rho_{r1} + \rho_{r2}} \frac{C_o}{\epsilon_o} = 43.1 \ \mu A$$

2)
Le differenze di potenziale ai capi dei condensatori sono uguali a quelle ai capi delle due resistenze. Per ciascuna di esse avremo:

$$V_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2} f \qquad con \ i = 1, 2$$

e le relative cariche accumulate nei condensatori sono

$$Q_i = \frac{C_i R_i}{R_1 + R_2} f \qquad con \ i = 1, 2$$

Utilizzando le relazioni 2 deduciamo che

$$Q_i = \frac{\epsilon_{ri} \rho_{ri}}{\rho_{r1} + \rho_{r2}} C_o f \qquad con \quad i = 1, 2$$

da cui deduciamo

$$Q_1 = 4.46 \cdot 10^{-4} \ C \qquad\qquad Q_2 = 5.63 \cdot 10^{-4} \ C$$

3)
Le cariche di polarizzazione sono dedotte ricordando che

$$Q_{pi} = \int_S \sigma_{pi} dS = \int_S \vec{P}_i \cdot \hat{n} dS$$

dove S è la superficie del dielettrico affacciata all'armatura del condensatore, $\vec{P}_i = \epsilon_o(\epsilon_{ri} - 1)\vec{E}_i \quad con \ i = 1, 2$ sono i vettori intensità di polarizzazione nei due condensatori. Nel caso di condensatori piani si ha:

$$Q_{pi} = \sigma_{pi} S = \epsilon_o(\epsilon_{ri} - 1)\frac{V_i}{d} S = (\epsilon_{ri} - 1)V_i C_o = (\epsilon_{ri} - 1)Q_i \frac{C_o}{C_i} = \frac{\epsilon_{ri} - 1}{\epsilon_{ri}} Q_i$$

essendo $E_i = \frac{V_i}{d}$, $C_o = \epsilon_o \frac{S}{d}$. Segue

$$Q_{p1} = 2.84 \cdot 10^{-4} \ C \qquad Q_{p2} = 4.16 \cdot 10^{-4} \ C$$

4)
L'energia accumulata di natura elettrostatica è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2C_o}(\frac{Q_1^2}{\epsilon_{r1}} + \frac{Q_2^2}{\epsilon_{r2}}) = 0.104 \ J$$

e la potenza dissipata è

$$W_d = If = 5.39 \ \ mW$$

Soluzione esercizio 2

a)

Applicando il teorema di Gauss ad un cilindro coassiale con il fascio si ha:

per $r < R$: $\quad 2\pi\ r\ E_o(r) = \frac{1}{\epsilon_o} n\ e\ \pi\ r^2 \quad \rightarrow \quad E_o(r) = \frac{ne}{2\epsilon_o} r$

per $r > R$: $\quad 2\pi\ r\ E_o(r) = \frac{1}{\epsilon_o} n\ e\ \pi\ R^2 \quad \rightarrow \quad E_o(r) = \frac{ne}{2\epsilon_o} \frac{R^2}{r}$

Dal teorema della circuitazione di Ampère si ottiene:

per $r < R$: $\quad 2\pi\ r\ B_o(r) = \mu_o\ \pi\ r^2\ n\ v \quad \rightarrow \quad B_o(r) = \frac{\mu_o\ n\ e\ v}{2}\ r$ per $r < R$: $\ 2\pi\ r\ B_o(r) = \mu_o\ \pi\ R^2\ n\ v \quad \rightarrow \quad B_o(r) = \frac{\mu_o\ n\ e\ v}{2}\ \frac{R^2}{r}$

b)

Il rapporto E_o/B_o risulta indipendente da r:

$$\frac{E_o}{B_o} = \frac{1}{\mu_o \epsilon_o\ v}$$

Per cui si ottiene:

$$v = \frac{1}{\mu_o \epsilon_o} \frac{B_o}{E_o} = c^2 \frac{B_o}{E_o} = 6 \cdot 10^6\ m/s$$

dove $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = 3.00 \cdot 10^8\ m/s$ è la velocità di propagazione della luce nel vuoto.

La densità n si ricava a partire dal valore del campo elettrico in r^* dove $r^* < R$. Si ha

$$n = \frac{2\epsilon_o E_o^*}{r^* e} = 1.00 \cdot 10^{16}\ m^{-3}$$

da cui

$$I = JS = nev\pi R^2 = n\ e\ v\ \pi\ R^2 = 75.4\ A$$