Prima prova d'esonero del corso di Elettromagnetismo

11Aprile 2014 - a.a. 2013/2014

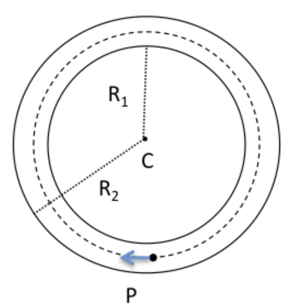
proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Esercizio 1
Le misure del campo elettrostatico terrestre $\vec{E}_T$, in condizioni di bel tempo, indicano che si tratta di un campo vettoriale diretto verso il centro della Terra e il valore del suo modulo, in prossimità della superficie, è pari a 100 V/m. Un modello semplice di distribuzione di carica è basato sull'esistenza di
- una carica distribuita uniforme sulla superficie terrestre con densità σ_T,
- una distribuzione uniforme di carica di volume ρ_T, estesa sino alla quota $h_{max} = 12\ km$ dalla superficie terrestre, la cui carica complessiva è di valore tale da rendere il sistema Terra+atmosfera complessivamente neutro. Sotto questa ipotesi, si chiede di determinare
a) la densità di carica σ_T distribuita sulla superficie terrestre,
b) la densità di carica di volume ρ_T,
c) la differenza di potenziale tra il punto a quota $h = 10\ km$ e la superficie terrestre.

Si assuma che la Terra sia una sfera di raggio $R_T = 6440\ km$.

Esercizio 2
Un dispositivo elettrostatico è costituito da due sottili gusci sferici concentrici di raggio $R_1 = 4\ cm$ e $R_2 = 5\ cm$, mantenuti rispettivamente a potenziali V_1 e V_2. Una sorgente emette elettroni nel punto P dello spazio vuoto compreso tra i due gusci, a distanza $R_P = 4.5\ cm$ dal centro delle due superfici sferiche. Gli elettroni hanno una velocità iniziale, perpendicolare alla direzione radiale del sistema sferico passante per P, e un'energia cinetica pari 1.4 keV. Si chiede di calcolare
a) il valore della differenza $V_1 - V_2$ tale da far compiere agli elettroni un'orbita circolare, b) l'energia elettrostatica immagazzinata nel dispositivo.

Si ricorda che la carica dell'elettone è $e = -1.60 \cdot 10^{-19}\ C$.



Soluzioni

Esercizio 1
a)
La distribuzione di carica ha simmetria sferica, quindi il campo elettrico ha linee di forza radiali il cui centro coincide con il centro della Terra. Inoltre l'ipotesi insita nel modello è che la Terra sia carica solo sulla sua superficie, quindi al suo interno il campo elettrico è nullo. Calcoliamo allora il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica coincidente con quella terrestre. In questo caso si ottiene:

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi {R_T}^2 E = \frac{Q_S}{\epsilon_o}$$

essendo Q_S la carica distribuita sulla superficie terrestre

$$Q_S = 4\pi {R_T}^2 \sigma_T$$

Poichè su quella superficie il modulo del campo è pari a $|\vec{E}_T(h=0)| = 100\ V/m$ ed il campo è rivolto verso il centro della Terra, tale carica è negativa e pari a

$$\sigma_T = -\epsilon_o\ |\vec{E}_T(h=0)| = -8,85 \cdot 10^{-10} C/m^2$$

b)
Il sistema è globalmente neutro, quindi la carica Q_S e quella distribuita nell'atmosfera Q_V soddisfano la relazione

$$Q_S + Q_V = 0$$

Per cui si ha:

$$4\pi R_T^2 \sigma_T = -\frac{4\pi}{3}\rho_T[(R_T + h_{max})^3 - R_T^3]$$

da cui si ricava

$$\rho_T = -(3\sigma_T R_T^2)/[(R_T + h_{max})^3 - R_T^3]$$

Essendo $h_{max} << R_T$, concludiamo che

$$\rho_T \simeq -\sigma_T/h_{max} = \epsilon_o|\vec{E}_T|/h_{max} = 7.4 \cdot 10^{-14} C/m^3$$

c)
Applicando il teorema di Gauss e indicando con $Q(r)$ la carica complessiva contenuta nella sfera di raggio $r = R_T + h$, si ha:

$$\vec{E}_T(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q(r)}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_S + \frac{4\pi}{3}\rho_T[r^3 - R_T^3]}{r^2}\hat{r}$$

essendo $\hat{r}$ il versore che dal centro della Terra punta verso l'atmosfera. Riscrivendo per convenienza questa espressione del campo nella forma

$$\vec{E}_T(r) = \frac{{R_T}^2}{\epsilon_o}\frac{\sigma_T - \frac{\rho_T}{3}\ R_T}{r^2}\hat{r} + \frac{1}{3\epsilon_o}\rho_T\ \vec{r}$$

ed integrando, si ottiene la differenza di potenziale

$$V(h+R_T) - V(R_T) = \int_{h+R_T}^{R_T} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = \frac{{R_T}^2}{\epsilon_o}(\sigma_T - \frac{\rho_T}{3}\ R_T)\Big(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\Big) - \frac{1}{3\epsilon_o}\rho_T\ h(R_T + \frac{h}{2}) = 5.8 \cdot 10^5\ V$$

Si noti che l'esercizio può esser risolto in modo più immediato introducendo delle evidenti approssimazioni. La carica totale è nulla ed è contenuta in uno strato di altezza $h_{max} = 12\ km$ su una sfera di raggio $R_T = 6440\ km$. Poiché $h_{max} << R_T$ possiamo approssimare il volume dell'atmosfera con $4\pi R_T^2 h_{max}$ e scrivere:

$$4\pi R_T^2\ \sigma_T + 4\pi R_T^2\ h_{max}\ \rho = 0$$

dalla quale si ottiene:

$$\sigma_T = -\rho h_{max}$$

Indicando con E_0 il modulo del campo elettrico entrante, dal teorema di Gauss applicato a una sfera di raggio $r = R_T + h$ si ha:

$$-E_0 \cdot 4\pi (R_T + h)^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{4\pi R_T^2 \sigma_T + \frac{4\pi}{3}\rho\left[(R_T + h)^3 - R_T^3\right]\right\}$$

che si può scrivere:

$$-E_0 \cdot 4\pi R_T^2 \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{4\pi R_T^2 \sigma_T + \frac{4\pi}{3}\rho\left(R_T^3\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^3 - R_T^3\right)\right\}$$

Poiché $\epsilon = h/R_T << 1$, ricordando lo sviluppo in serie

$$(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$$

la precedente relazione, dopo aver semplificato, diventa:

$$-E_0 \cdot \left(R_T^2 + 2hR_T\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{R_T^2 \sigma_T + \frac{1}{3}\rho\left[R_T^3 + 3hR_T^2 - R_T^3\right]\right\}$$

$$-E_0 \cdot \left(R_T^2 + 2hR_T\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{R_T^2 \sigma_T + \rho h R_T^2\right\}$$

$$-E_0 = \frac{\sigma_T}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{h}{h_{max}}\right)\frac{R_T^2}{R_T^2 + 2R_T h}$$

Per $h = 0$ si trova:

$$\sigma_T = -\epsilon_0 E_0(h = 0) = -8.85 \cdot 10^{-10}\ C/m^2 \quad \text{e} \quad \rho = \frac{\epsilon E_0(h = 0)}{h_{max}} = 7.4 \cdot 10^{-14}\ C/m^3$$

L'espressione trovata per il modulo del campo elettrico essendo $h << R_T$ si può riscrivere come:

$$E_0 \simeq \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(h_{max} - h\right)$$

e tenendo conto che la componente radiale (col segno) è $E_r = -E_0$ si può integrare per dedurre la d.d.p.:

$$V(R_T + h) - V(R_T) = \int_{R_T + h}^{R_T} E_r dr = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\int_h^0 (h_{max} - h)\ dh =$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0}\left(h_{max}h - \frac{1}{2}h^2\right)_h^0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(h_{max}h - \frac{1}{2}h^2\right) = 5.8 \cdot 10^5\ V$$

Esercizio 2

a)
Dall'equazione del moto circolare degli elettroni possiamo imporre

$$ma = m\frac{v^2}{R_P} = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_o R_P^2} \tag{1}$$

Detta K l'energia cinetica della particella carica,

$$2\ K = mv^2$$

dall' equazione (1) possiamo dedurre la carica Q che deve essere fornita al dispositivo:

$$Q = 8\pi\epsilon_o\frac{K}{e}R_P = 1.4 \cdot 10^{-8} \quad C$$

Questo sistema è un condensatore sferico la cui capacità è

$$C = 4\pi\epsilon_o\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 22.2 \quad pF$$

Ne segue che la differenza di potenziale è:

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} = 2\frac{K}{e}R_P\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = 631\ V$$

b)
L'energia immagazzinata nel dispositivo è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = 4.4 \quad \mu J = 28 \quad TeV$$