Seconda prova d'esonero del corso di Elettromagnetismo

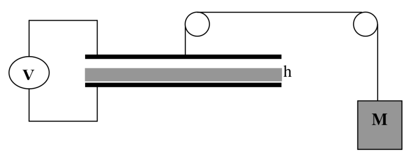
16 Maggio 2014 - a.a. 2013/2014

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

L

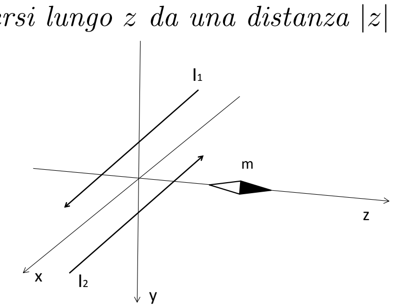
Esercizio 1

Due lastre metalliche piane, di superficie pari a 0.8 m^2, sono affacciate alla distanza $h = 4\ mm$ e formano quindi un condensatore piano. Le due armature sono connesse ad un generatore di tensione con differenza di potenziale V. L'armatura inferiore è fissa, quella superiore è mantenuta in equilibrio meccanico da una massa $M = 0.8\ kg$, come da figura. Inizialmente non vi è dielettrico tra le armature.
Calcolare, trascurando gli effetti di bordo,
a) la capacità del condensatore,
b) la tensione V alla quale il sistema è in equilibrio considerando trascurabili le masse delle lastre, della fune e della carrucola.
Dopo aver bloccato la carrucola, viene successivamente inserito un dielettrico di spessore $d = 2\ mm$ e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.5$. In questa nuova condizione si calcoli:
Esonero-2014-05-16-v4.tex c) la nuova capacità,
d) la forza tra le armature.



Esercizio 2

Due fili infinitamente lunghi sono posti parallelamente all'asse $\hat{x}$ nel piano $z = 0$ a $y = d = 1.0\ cm$ e $y = -d$. Sono percorsi da una stessa corrente $I = 2.5\ A$ in direzioni opposte, vedi figura. Si determini:
a) il campo di induzione magnetica B_0 nei punti dell'asse z e si calcoli il valore del modulo per $z = 0.5\ cm$;
b) l'energia potenziale di un aghetto magnetico, con orientamento fissato, di momento $\vec{m} = m\hat{z}$, con $m = 2 \cdot 10^{-7}\ Am^2$ vincolato a muoversi lungo l'asse z;
c) dove l'energia potenziale dell'aghetto è minima e se ne calcoli il valore;
d) la componente z della forza agente sull'aghetto magnetico in funzione della sua posizione z e se ne calcoli il valore del modulo per $z = 0.5\ cm$;.
Facoltativamente si calcoli altresì il periodo delle piccole oscillazioni dell'aghetto di massa $m_m = 1\ mg$, quando viene lasciato libero di muoversi lungo z da una distanza $|z| << d$ dall'origine degli assi.



Soluzioni

Esercizio 1
a) Il condensatore ha capacità pari a:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{h} = 1.8 \ nF$$

b) La forza elettrostatica si deduce a partire dall'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nel condensatore,

$$U_{el}(x) = \frac{1}{2} C_0 V^2 = \epsilon_o \frac{\Sigma}{x} V^2$$

dove x è la distanza variabile tra le armature del condensatore. Col condensatore mantenuto a potenziale costante dal generatore, nel bilancio energetico dei lavori virtuali il lavoro compiuto dal generatore è pari al doppio della variazione di U_{el} e la forza elettrostatica risulta pari a $F_{el} = \frac{dU_{el}}{dx}|_{V=cost}$ (confronta Mencuccini e Silvestrini, Cap.VII.7.1). Si trova:

$$F_{el}(x = h) = \left(\frac{dU_{el}}{dx} \right)_{x=h} = -\epsilon_o \Sigma \frac{E^2}{2}$$

essendo $E = V/h$. La forza tra le armature è attrattiva ($F_{el} < 0$).
Allo stesso risultato si arriva considerando che la tensione deve bilanciare la forza di attrazione elettrostatica, che si può calcolare dalla pressione elettrostatica:

$$P = \epsilon_o \frac{E^2}{2} \quad .$$

Si deduce per la forza F:

$$F = \epsilon_o \Sigma \frac{E^2}{2} = \epsilon_o \Sigma \frac{V^2}{2h^2} = \frac{1}{2} \frac{C_0^2 V^2}{\epsilon_0 \Sigma} = M \ g = 7.95 \ N$$

Il voltaggio applicato è:

$$V = \sqrt{\frac{2h^2 M g}{\epsilon_o \Sigma}} = 6.0 \ kV$$

c) Quando il dielettrico è inserito si hanno due condensatori in serie, uno a vuoto, l'altro con il dielettrico:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h-d}{\epsilon_o \Sigma} + \frac{d}{\epsilon_o \epsilon_r \Sigma}$$

Per cui si deduce la capacità totale:

$$C = 2.5 \ nF$$

d) A potenziale costante la carica $Q = CV$ aumenta al crescere della capacità, e quindi aumenta anche la forza:

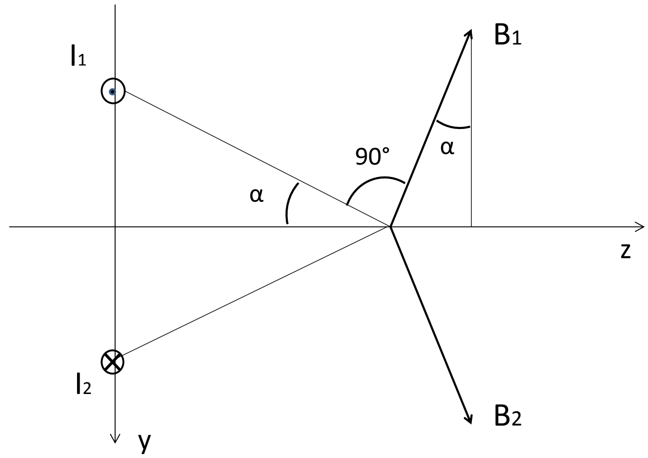
$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_o} \Sigma = \frac{1}{2} \frac{C^2 V^2}{\epsilon_o \Sigma} = 15.9 \ N$$

Esercizio 2
a) I campi generati dalle due correnti nel punto di coordinate (0,0,z) hanno stesso modulo:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{(d^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Le componenti in direzione y si annullano tra loro mentre quelle lungo l'asse z si sommano (vedi figura).

$$B_{1z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{(d^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \ sin\alpha \quad \text{e} \quad B_{2z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{(d^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \ sin\alpha$$



Poiché:

$$sin\alpha = \frac{d}{(d^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ne segue:

$$B_{tot}(z) = B_{1z} + B_{2z} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{Id}{(d^2+z^2)}$$

che per $z = 0.5\ cm$ è pari a $8 \cdot 10^{-5}$ Tesla.
b) L'energia dell'aghetto magnetico è:

$$U(z) = -\vec{m}\cdot\vec{B}_{tot} = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{mId}{(d^2+z^2)}$$

c) derivando rispetto alla posizione si trova:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{\mu_0}{\pi}mId\frac{2z}{(d^2+z^2)^2}$$

che si annulla per $z = 0$ dove si ha un minimo e si trova $U = -2.0 \cdot 10^{-11}\ J$
d) La componente z della forza agente sull'aghetto magnetico, è:

$$F_z = \left(\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\right)B_{totz} = \left(m\frac{\partial}{\partial z}\right)B_{totz} = -\frac{\mu_0}{\pi}mId\frac{2z}{(d^2+z^2)^2}$$

che per $z = 0.5\ cm$ è pari a $-1.29 \cdot 10^{-9}$ N.
e) Per $|z| << d$ la forza si riduce a:

$$F_z = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{2mI}{d^3}\ z$$

cioé a una forza di richiamo elastica e l'aghetto magnetico, spostato dall'origine, inizierebbe a oscillare intorno a questa secondo l'equazione:

$$m_m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{2mI}{d^3}\ z$$

con periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi m_m d^3}{2\mu_0 mI}} = \quad 9.9\ s \quad .$$