Soluzione Esercizio 1

La circuitazione del campo H lungo la circonferenza media del toroide è:

$$H\ l + H_0\ d = 0$$

Per le condizioni di raccordo alla superficie traferro-toroide, il campo $B_0 = \mu_0 H_0$ nel traferro è uguale a B nel magnete toroidale, quindi:

$$H\ l + \frac{B}{\mu_0}\ d = 0 \qquad \text{dalla quale} \qquad B = -\mu_0 H \frac{l}{d}$$

che rappresenta una prima relazione tra B e H nel materiale ferromagnetico. Questa relazione tra i valori di H e B indica che il materiale si trova nel secondo o nel quarto quadrante del piano (H, B) (vedi figura). Le due possibilità sono equivalenti.
Una seconda relazione si trova dalle informazioni date sulla lega ferromagnetica. Conoscendo i valori dei campi B_r e H_C si trova la retta che approssimando il tratto del ciclo di isteresi nel secondo quadrante:

$$B = \frac{B_r}{H_C} H + B_r \qquad .$$

Questa fornisce una seconda relazione tra i campi B e H. La soluzione del sistema tra le due relazioni:

$$\begin{cases} B = -\mu_0 H \frac{l}{d} \\ B = \frac{B_r}{H_C} H + B_r \end{cases}$$

permette di trovare i campi B e H nel toroide:

$$B = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r d}{\mu_0 H_C l}} \qquad H = -\frac{d}{\mu_0 l} B = -\frac{d}{\mu_0 l}\ \frac{B_r}{1 + \frac{B_r d}{\mu_0 H_C l}}$$

e l'intensità di magnetizzazione M:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1}{\mu_0}\left(1 + \frac{d}{l}\right) B = \frac{1}{\mu_0}\left(1 + \frac{d}{l}\right) \frac{B_r}{1 + \frac{B_r d}{\mu_0 H_C l}}$$

Nel traferro:

$$B_0 = B \qquad\qquad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \qquad\qquad M_0 = 0 \quad .$$

I valori dei campi sono:

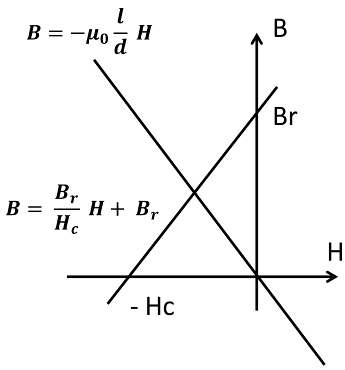
$$B = B_0 = 0.607\, T\ , H = -4831\ Asp/m\ ,\ M = 4.88{\cdot}10^5\ A/m\ ,\ H_0 = 4.83{\cdot}10^5\ Asp/m$$

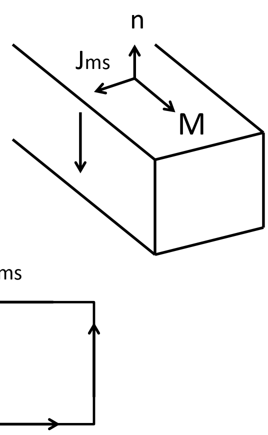
Poiché il materiale è uniformemente magnetizzato ($\vec{J}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$) non c'è corrente amperiana di volume. Sulla superficie laterale del toroide è presente invece una corrente amperiana di superficie $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$ come illustrato in figura. La corrente totale amperiana di superficie è $I_{ms} = J_{ms} l$:

$$I_{ms} = \frac{l}{\mu_0} \left(1 + \frac{d}{l}\right) \frac{B_r}{1 + \frac{B_r d}{\mu_0 H_C l}} \quad .$$

I valori della densità di corrente e di corrente totale amperiane sono:

$$J_{ms} = M \qquad \text{e} \qquad I_{ms} = 7.32 \cdot 10^5 \ A$$





Soluzione Esercizio 2

Il flusso concatenato con la spira di superficie $S = l^2$ è:

$$\Phi(B) = \vec{B} \cdot \hat{n} S = BS \ cos \ \theta$$

dove θ è l'angolo tra il campo $\vec{B}$ e il versore $\hat{n}$ normale al piano della spira. La forza elettromotrice nella spira è:

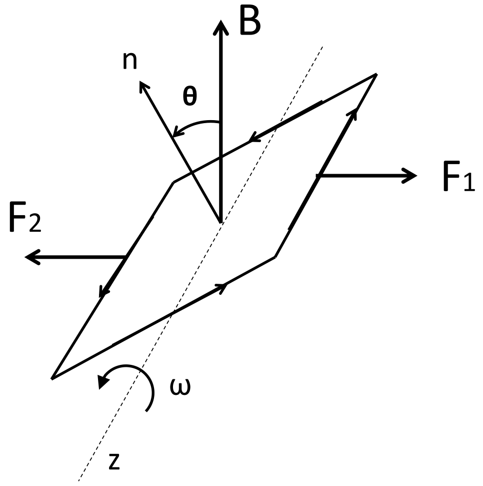
$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS \ \dot{\theta} sen \ \theta$$

e la corrente:

$$i = \frac{BS\dot{\theta}}{R} sen \ \theta$$

Su ogni lato della spira agisce una forza $\vec{F} = i\ \vec{l} \times \vec{B}$. Le forze sui lati non paralleli all'asse z sono uguali ed opposte e costituiscono una coppia di braccio nullo. Sui lati paralleli all'asse z le forze sono parallele, uguali in modulo, ma agendo su rette parallele costituiscono una coppia di momento non nullo:

$$\vec{M} = -iBl^2 sen\ \theta\ \hat{\theta} = -\frac{B^2S^2\dot{\theta}}{R} sen^2\theta\ \hat{\theta}$$



Il momento meccanico si oppone alla rotazione ($\vec{M}$ opposto a $\vec{\dot{\theta}}$) come atteso dalla legge di Lenz.
Allo stesso risultato si arriva dalla formula del momento meccanico $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ per la spira di momento $\vec{m} = iS\hat{n}$. In questo caso si deve tener conto che il prodotto vettoriale ha segno opposto a $\hat{\theta} = \hat{z}$.
L'equazione del moto della spira è:

$$I\ \frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} = \vec{M} \qquad \text{cioé} \qquad I\ddot{\theta} = -\frac{B^2S^2\dot{\theta}}{R} sen^2\theta$$

Per mantenere la spira in rotazione a velocità angolare $\dot{\theta} = \omega_o$ costante è necessario applicare dall'esterno un momento meccanico $\vec{M}_e$ tale che:

$$I\ \frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} = \vec{M} + \vec{M}_e\ =\ 0 \qquad \text{e quindi:} \qquad \vec{M}_e = -\vec{M}$$

$$M_e = \frac{B^2S^2\omega_o}{R} sen^2\theta \qquad .$$

La potenza da applicare dall'esterno è:

$$P_e = \vec{M}_e \cdot \vec{\dot{\theta}} = M_e\omega_o = \frac{B^2S^2\omega_o^2}{R} sen^2\theta$$

che, usando l'espressione della corrente trovata in precedenza, risulta uguale alla potenza dissipata in effetto Joule nella resistenza R :

$$P_J = i^2 R = \frac{B^2 S^2 \omega_o^2}{R} sen^2\theta$$

Il valore medio della potenza applicata è:

$$\overline{P_e} = \overline{P_J} = \frac{1}{2}\frac{B^2 S^2 \omega_o^2}{R} \qquad \text{essendo su un periodo} \quad \overline{sen^2\theta} = \frac{1}{2}$$

Nel nostro caso $\overline{P_e} = 6.4\ W$.