Corso di Elettromagnetismo

a.a. 2014/15, 2^a prova di esonero 15 Maggio 2015

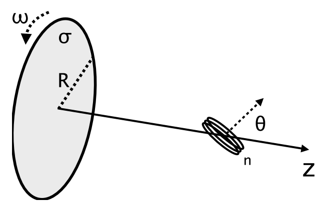
Proff. S.Giagu, F. Lacava, D. Trevese

Esercizio 1

Un disco rigido isolante di raggio $R = 2$ m è caricato con una densità di carica superficiale uniforme $\sigma = 1\,10^{-4}$ C/m^2, e ruota intorno al proprio asse compiendo $N = 5000$ giri al secondo.

a) Detereminare l'espressione del campo di induzione magnetica generato dal disco lungo i punti dell'asse di rotazione, e calcolare il valore numerico del modulo nel punto posto a distanza $d = 10$ cm dal disco; Sull'asse del disco alla distanza d dal disco stesso viene posta una piccola bobina circolare e compatta costituita da $n = 500$ spire di raggio $r_s = 2$ cm molto minore di R percorse dalla corrente costante $I = 2$ A.

b) Determinare modulo, direzione e verso della forza che si esercita sulla bobina quando questa è orientata nella direzione di equilibrio stabile.



[SUGGERIMENTO: $\int \frac{x^3 dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x^2+2a^2}{(a^2+x^2)^{1/2}}$].

Esercizio 2

Un filo rettilineo verticale, percorso da una corrente $I = 3$A verso l'alto, è circondato da un involucro di materiale paramagnetico (isolante) di raggio interno ed esterno pari a $R_1 = 1$mm e $R_2 = 1$cm. Il sistema è posto in un ambiente a temperatura $T = 300$K alla quale la suscettività magnetica del materiale è pari a $\chi_m = 6.67 \times 10^{-6}$ (si assuma che la suscettività sia costante nello spazio e non vari col campo magnetico).

a) Determinare il campo induzione magnetica $\vec{B}$, il campo magnetico $\vec{H}$ e la magnetizzazione $\vec{M}$ in tutto lo spazio e nel punto distante $D = 5$mm dal filo.

b) Calcolare le correnti amperiane nell'involucro.

c) Una spira circolare percorsa da una corrente $i = 0.1$A e di raggio $R_s = 1$mm è posta a $d = 2$m dal filo. Come deve essere disposta la spira affinchè sia in una posizione di equilibrio? Quanto vale l'energia magnetica della spira in quel caso?

d) come si modificano le correnti amperiane se il sistema viene portato alla temperatura $T = 200$K ?

[Potrebbe essere utile ricordare che il rotore di un vettore $\vec{F} = (F_r, F_\theta, F_z)$ in coordinate cilindriche è $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}, \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \right)$.]

Soluzioni

Esercizio 1

---

a)
Dividendo il disco in corone circolari di raggio compreso tra r e $r+dr$, la carica dq associta ad ogni corona sarà data da $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr$. La rotazione produrrà di conseguenza una corrente equivalente pari a:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi\sigma r dr = \omega\sigma r dr;$$

La corona circolare precorsa dalla corrente di produce su un punto sull'asse a distanza d dal centro dell'asse del disco il campo magnetico:

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2} \frac{r^2}{(d^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega\sigma}{2} \frac{r^3 dr}{(d^2+r^2)^{3/2}}.$$

Integrando tra zero e R si ottiene il campo di induzione magnetica comeplssivo:

$$B(d) = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} \frac{2d^2+r^2}{(d^2+r^2)^{1/2}}\Big|_0^R = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left(\frac{2d^2+R^2}{(d^2+R^2)^{1/2}} - 2d\right) = 3.6\,10^{-6}\ T$$

b)

Poichè il raggio della bobina è piccolo rispetto a R, possiamo considerare il campo $B(d)$ costante sulla superficie della bobina. Considerando la bobina come un dipolo magnetico di momento magnetico $m = nIS = nI\pi r_s^2$, sul quale agisce il campo magnetico $B(d)$. L'energia potenziale meccanica del dipolo immerso nel campo di induzione magnetica $\mathbf{B}(d)$ è data da $U_m = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(d)$, e risulta minima quando $\mathbf{m}$ e $\mathbf{B}$ sono allineati e nello stesso verso. Di conseguenza la bobina si disporrà ad un angolo $\theta = 0$, in modo tale da avere il proprio asse parallelo all'asse del disco e corrente I circolante in senso antiorario.
La forza può essere ottenuta dalla relazione:

$$\mathbf{F} = grad(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B});$$

Poichè $\mathbf{m}$ e $\mathbf{B}$ sono paralleli avremo:

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0\omega\sigma n\pi r_s^2 I}{2}\left(\frac{2x^2+R^2}{(x^2+R^2)^{1/2}} - 2x\right) =$$

da cui:

$$\begin{aligned}F &= \frac{\mu_0\omega\sigma n\pi r_s^2 I}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2+R^2}{(x^2+R^2)^{1/2}} - 2x\right)\Bigg]_{x=d} = \\ &= \frac{\mu_0\omega\sigma n\pi r_s^2 I}{2}\left(\frac{4d}{(d^2+R^2)^{1/2}} - \frac{d(2d^2+R^2)}{(d^2+R^2)^{3/2}} - 2\right) = \\ &= \frac{\mu_0\omega\sigma n\pi r_s^2 I}{2}\left(\frac{2d^3-3dR^2}{(d^2+R^2)^{3/2}} - 2\right) = -4.6\,10^{-6}\ N\end{aligned}$$

Esercizio 2

a)
Vista la simmetria del problema, si può applicare il teorema di Ampere ad una linea chiusa circolare ortogonale al filo. Il campo magnetico è tangenziale alla curva e quindi continuo in tutto lo spazio. Il suo modulo vale

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \tag{1}$$

Il verso di H è antiorario guardando il sistema dall'alto. Il campo induzione magnetica è proporzionale a $\vec{H}$ e vale in modulo

$$B(r) = \mu_0(1+\chi_m)H(r) = \begin{cases} \frac{I\mu_0}{2\pi r} & 0 < r < R_1, r > R_2 \\ \frac{I\mu_0(1+\chi_m)}{2\pi r} & R_1 < r < R_2 \end{cases} \tag{2}$$

ed è discontinuo a $r = R_1$ e $r = R_2$. Infine, il modulo della magnetizzazione vale

$$M(r) = \chi_m H(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1, r > R_2 \\ \frac{I\chi_m}{2\pi r} & R_1 < r < R_2 \end{cases}, \tag{3}$$

e $\vec{M}$ ha la stessa direzione e verso di $\vec{H}$. A distanza $D = 5$mm dal filo abbiamo $R_1 < D < R_2$ e dunque

$$H = 95.5\,\mathrm{A/m}\,, \quad B = 1.2\,\mathrm{Gauss}\,, \quad M = 6.4 \times 10^{-4}\,\mathrm{A/m}\,. \tag{4}$$

b)

Le densità di correnti amperiane all'interno dell'involucro e sulle interfacce valgono rispettivamente

$$\vec{j}_v = \vec{\nabla} \times \vec{M} \tag{5}$$

$$\vec{j}_s = \vec{M} \times \vec{n} \tag{6}$$

dove $\vec{n}$ è il versore normale alla superficie e orientato verso l'esterno. Nel caso in esame, $\vec{n}$ è radiale. Dal momento che $\vec{M} = (0, \mathrm{const/r}, 0)$, il suo rotore è nullo e quindi non circola corrente all'interno dell'involucro, $\vec{j}_v = 0$, come è possibile dedurre direttamente utilizzando la quarta equazione di Maxwell nel caso in cui la suscettività χ_r sia omogenea e constante, $\vec{j}_v = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \chi_r \vec{\nabla} \times \vec{H} = \chi_r \vec{j} = 0$. Per quanto riguarda le correnti superficiali, le loro densità lineari sono dirette lungo l'asse del filo, j_{s1} concorde col verso della corrente mentre j_{s2} è discorde. In modulo

$$j_{s1} = M(r = R_1) = \frac{I\chi_m}{2\pi R_1} = 3.2 \times 10^{-3}\,\mathrm{A/m}\,, \tag{7}$$

$$j_{s2} = M(r = R_2) = \frac{I\chi_m}{2\pi R_2} = 3.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{A/m}\,, \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Le correnti amperiane superficiali circolano lungo la superficie cilindrica nella direzione dell'asse del filo. Dividendo la superficie in tante listarelle infinitesime ciascuna con densità di corrente $di = i_i/(2\pi R_i)dR_i = j_{si}dR_i$, otteniamo $i_i = j_{si}2\pi R_i = I\chi_m \approx 2 \times 10^{-5}$A. A causa della cancellazione di R_i nelle formule precedenti, le due correnti hanno stesso modulo (ma verso opposto).

c)

In punto qualsiasi distante $r > R_2$ dal filo, il campo induzione magnetica $\vec{B}$ è tangente alla circonferenza di raggio r ortogonale al filo. La spira ha un momento di dipolo magnetico pari (in modulo) a $m = i\pi R_s^2$. La spira sarà in equilibrio quando $\vec{m}$ è parallelo a $\vec{B}$, ossia quando la spira è verticale (giace sul piano individuato dal filo e dal vettore $\vec{r}$) e il verso della corrente è tale che il momento di dipolo magnetico ha lo stesso verso di $\vec{B}$. In questa configurazione l'energia elettrostatica vale

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \approx -9.4 \times 10^{-14}\,\mathrm{J}\,. \tag{10}$$

d)

Essendo l'involucro un paramagnete, la sua suscettività è inversamente proporzionale alla temperatura. A $T = 200K$ la suscettività magnetica è pari a $\chi_m' = (300/200)\chi_m = 3/2\chi_m \approx 10^{-5}$. Il modulo della magnetizzazione aumenterebbe di un fattore 3/2 e con esso le intensità delle correnti amperiane.