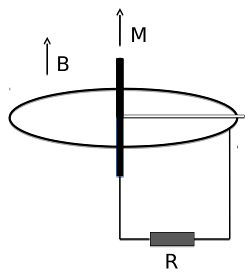
Corso di Elettromagnetismo

a.a. 2014/15, 3^a prova di esonero 12 Giugno 2015

Proff. S.Giagu, F. Lacava, D. Trevese

Problema 1

L'estremità di un'asticella conduttrice di lunghezza ℓ è fissata ad un asse conduttore al centro di un anello metallico, mentre l'altra estremità può scorrere senza attrito in contatto elettrico con l'anello. L'asse è anche connesso all'anello tramite un circuito conduttore comprendente una resistenza R. All'istante $t = 0$ viene applicato all'asse un momento meccanico M costante. Il sistema è immerso in un campo d'induzione magnetica B perpendicolare al piano dell'anello e con verso concorde con il momento M, come in figura.
a) Si ricavi l'equazione differenziale per il moto dell'asticella;
b) si determini la velocità angolare limite dell'asticella;
c) si trovi come variano, in funzione del tempo, la velocità angolare e la differenza di potenziale ai capi della resistenza;
d) si ricavi la potenza dissipata a regime nella resistenza.
Si trascuri l'autoinduzione del circuito.
Dati: momento di inerzia dell'asticella rispetto all'esteremità: $I = 3.0 \cdot 10^{-3}$ Kg m^2, $M = 0.1$ Nm, $R = 3\ \Omega$, $B = 0.5$ T, $\ell = 25$ cm



Problema 2

Un solenoide cilindrico di raggio a, lunghezza $h \gg a$, resistenza elettrica R e numero di spire per unità di lunghezza n, è percorso da una corrente i_0 mantenuta costante da un generatore. All'istante $t = 0$ il generatore viene disconnesso e il circuito viene chiuso su se stesso. In tale configurazione e assumendo di essere in condizioni quasi stazionarie (corrente di spostamento trascurabile), determinare:
a) l'andamento della corrente nel solenoide in funzione del tempo;
b) le espressioni del campo di induzione magnetica e del campo elettrico dentro al solenoide, calcolandone i moduli per $r = a/2$ e $t = 0$;
c) l'espressione del vettore di Poynting $\mathbf{I}$ nei punti all'interno del solenoide, indicandone esplicitamente direzione e verso, e il valore assunto da I sulla superficie cilindrica del solenoide al tempo t_1;
d) l'espressione del flusso del vettore di Poynting $\mathbf{I}$ che attraversa la superficie cilindrica, coassiale con il solenoide, di raggio $b < a$ e altezza h, e il suo valore al tempo t_1; confrontare il risultato ottenuto con la derivata temporale dell'energia magnetica contenuta nel volume cilindrico individuato da tale superficie e commentare il risultato ottenuto.
Dati: $a = 20.0\,\mathrm{cm}$, $R = 100.0\,\Omega$, $n = 2000$ spire/m, $i_0 = 0.5\,\mathrm{A}$, $t_1 = 6.0\,\mathrm{ms}$, $b = 10.0\,\mathrm{cm}$, $h = 1.0\,\mathrm{m}$.

Soluzione problema 1

a)
Nell'asticella ruotante con velocità $\vec{\omega}$ è presente un campo elettromotore $\mathbf{E_e}$ e quindi una forza elettromotrice fem:

$$\mathbf{E_e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \omega B \mathbf{r} \qquad fem = \omega B \int_0^{\ell} \mathbf{r} \cdot \mathbf{dr} = \frac{B\ell^2}{2}\omega \tag{1}$$

dove il segno positivo di fem corrisponde alla direzione del campo $\mathbf{E}_e$, cioè del vettore r diretto dal centro verso l'esterno. [Si ricordi anche la relazione vettoriale: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$].

Allo stesso risultato si arriva osservando che mentre l'asticella ruota di $d\theta$ si ha un flusso tagliato $d\Phi_{tagl} = \frac{1}{2}\ell^2 B \, d\theta$ al quale corrisponde una variazione $d\Phi_{conc}(B) = -d\Phi_{tagl}(B)$ del flusso concatenato con il circuito elettrico comprendente l'asticella e la resistenza R. Nel circuito è quindi presente una forza elettromotrice:

$$fem = -\frac{d\Phi_{conc}(B)}{dt} = \frac{d\Phi_{tagl}(B)}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\frac{1}{2}\ell^2 B d\theta\right) = \frac{B\ell^2}{2}\omega$$

La fem genera una corrente:

$$i = \frac{fem}{R} = \frac{B\ell^2}{2R}\omega \quad . \tag{2}$$

Per stabilire la legge del moto è necessario considerare il momento della forza dovuta alla corrente che scorre nell'asticella in moto nel campo $\mathbf{B}$. Per un elemento di asticella $\mathbf{dr}$, la forza vale:

$$\mathbf{dF}_L = i\mathbf{dr} \times \mathbf{B}$$

e il momento

$$\mathbf{dM}_L = \mathbf{r} \times \mathbf{dF}_L = i\mathbf{r} \times (\mathbf{dr} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \, rdr \quad .$$

Integrando tra 0 e ℓ

$$\mathbf{M_L} = -\mathbf{B} \int_0^{\ell} rdr = -\frac{i\ell^2}{2}\mathbf{B} \quad .$$

Sostituendo la formula per la corrente (2), il momento dovuto alla forza di Lorentz vale

$$\mathbf{M_L} = -\frac{B\omega\ell^4}{4R}\mathbf{B} = -\frac{B^2\ell^4}{4R}\vec{\omega}$$

Per $\omega > 0$, ω concorde con $\mathbf{M}$, il campo elettromotore $\mathbf{E_e}$, la fem (1) e la corrente (2) vanno dall'asse verso l'anello e, come richiesto dala legge di Lenz, si genera un momento meccanico $\mathbf{M_L}$ che si oppone a $\mathbf{M}$.

L'equazione del moto dell'asticella è quindi:

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \mathbf{M} - \mathbf{M_L}$$

ovvero:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} - \frac{B^2\ell^4}{4RI}\omega$$

b)
A regime la velocità angolare non cambia nel tempo:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

da cui:

$$\frac{M}{I} - \frac{B^2\ell^4}{4RI}\omega = 0$$

e quindi la velocità angolare limite vale:

$$\omega_\infty = \frac{4RM}{B^2\ell^4} = 1230 \text{ rad/s}$$

c)
L'equazione del moto della sbarretta è del tipo:

$$\frac{d\omega}{dt} = A - C\omega$$

con $A = \frac{M}{I}$ e $C = \frac{B^2\ell^4}{4RI}$, che si risolve scrivendo

$$\frac{d\omega}{A - C\omega} = dt$$

Da integrare tra 0 e ω a sinistra, e tra 0 e t a destra. Quindi

$$-\frac{1}{C}\ln\frac{A - C\omega}{A} = t$$

da cui

$$\omega(t) = \frac{A}{C}\left(1 - e^{-Ct}\right)$$

ovvero

$$\omega(t) = \omega_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

con

$$\omega_\infty = \frac{4RM}{B^2\ell^4} = 1230 \text{ rad/s}$$

e

$$\tau = \frac{4RI}{B^2\ell^4} = 37 \text{ s}$$

Ricordando che $fem = B\ell^2\omega/2$, la differenza di potenziale ai capi della sbarretta varia con la legge

$$fem = fem_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

con

$$fem_\infty = \frac{B\ell^2}{2}\omega_\infty = \frac{2RM}{B\ell^2} = 19 \text{ V}$$

d)
La potenza dissipata vale $W = fem^2/R$. A regime

$$W_\infty = \frac{fem_\infty^2}{R} = \frac{4M^2R}{B^2\ell^4} = 123 \text{ W}$$

anche uguale a $\omega_\infty M$.

Soluzione problema 2

---

a)
Il sistema è equivalente ad un circuito RL in scarica, inizialmente percorso dalla corrente I_0. L'equazione del circuito è data da:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \Longrightarrow i(t) = i_0 e^{-\frac{Rt}{L}};$$

con $L = \mu_0 n^2 h \pi a^2 = 0.63\,\mathrm{H}$.

b)
In approssimazione quasi stazionaria, trascurando effetti di corrente di spostamento, il campo magnetico nel solenoide indefinito è dato da:

$$\mathbf{B} = B\hat{z} = \mu_0 n i(t)\hat{z} \Longrightarrow B(t=0) = 1.3\,\mathrm{mT}$$

La variazione lenta di B genera un piccolo campo elettrico $\mathbf{E}$ calcolabile utilizzando l'espressione integrale della terza equazione di Maxwell, ed osservando che le linee di forza di $\mathbf{E}$ per simmetria saranno circonferenze centrate sull'asse del solenoide:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{l} = -\Phi(\tfrac{dB}{dt}) \Longrightarrow E2\pi r = -\pi r^2 \tfrac{dB}{dt};$$
$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\phi} = -\tfrac{r}{2}\tfrac{dB}{dt}\hat{\phi} = \tfrac{Rr\mu_0 n i(t)}{2L}\hat{\phi} \Longrightarrow E(r=a/2, t=0) = 10.0\,\mathrm{mV/m};$$

c)
Per definizione di vettore di Poynting, ed osservando che $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ sono tra loro ortogonali, avremo:

$$\mathbf{I} = I(r)\hat{r} = \tfrac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\hat{r} = \tfrac{EB}{\mu_0}\hat{r} = \tfrac{\mu_0 R n^2 i(t)^2}{2L}\mathbf{r};$$

diretto radialmente verso l'esterno. Risulterà anche $I(r=a, t=t_1) = 2.98\,\mathrm{W/m^2}$.

d)
Il flusso di $\mathbf{I}$ attraverso la superficie cilindrica di raggio b e altezza h è dato da:

$$\Phi(\mathbf{I}) = 2\pi b h I(b) = 2\pi b h \tfrac{\mu_0 R n^2 i(t)^2 b}{2L} = \pi b^2 h \tfrac{\mu_0 R n^2 i(t)^2}{L} = \mathrm{V}\times\tfrac{\mu_0 R n^2 i(t)^2}{L} \Longrightarrow \Phi(r=b, t=t_1) = 0.94\,\mathrm{W};$$

avendo indicato con $\mathrm{V} = \pi b^2 h$ il volume del cilindro.
L'energia magnetica contenuta nel volume del cilindro è data da:

$$U_M = \mathrm{V}\times\tfrac{B^2}{2\mu_0} = \mathrm{V}\times\tfrac{\mu_0 n^2 i(t)^2}{2};$$

per cui considerando la derivata temporale:

$$\tfrac{dU_M}{dt} = \mathrm{V}\times\tfrac{\mu_0^2 n^2}{2\mu_0}\tfrac{di(t)^2}{dt} = -\mathrm{V}\times\tfrac{\mu_0 R n^2 i(t)^2}{L} = -\Phi(\mathbf{I}).$$

Il flusso del vettore di Poynting coincide, come atteso, con la variazione dell'energia magnetica e non con la variazione dell'energia magnetica + elettrica, a causa dell'approssimazione di quasi stazionarietà con cui è stato trattato il problema, per la quale si è trascurato il contributo a $\mathbf{B}$ dovuto alla piccola corrente di spostamento legata alla variazione temporale di $\mathbf{E}$.