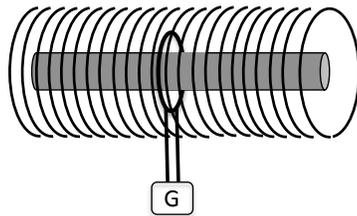


**Compito di Esonero n. 2 del 16/6/2016.**  
**per il corso di Elettromagnetismo.**  
proff. Giagu, Lacava, Rahatlou

Esercizio 1

All'interno di un solenoide cilindrico di lunghezza  $l = 1.5$  m e di raggio  $r_S \ll l$ , con  $N = 500$  spire, sono posti un cilindro di materiale ferromagnetico, con permeabilità ferromagnetica  $\mu_r = 100$ , lunghezza  $l$  e raggio  $r_C = 2$  cm e una spira di raggio  $\rho$ , con  $r_C < \rho < r_S$ , e resistenza  $R = 10 \Omega$ , connessa a un galvanometro balistico. Il solenoide, il cilindro ferromagnetico e la spira sono coassiali. Nel solenoide viene fatta circolare una corrente  $I = 3$  A. Trascurando gli effetti di bordo, si determinino:

- a) i campi  $H$ ,  $B$  e  $M$  in funzione della distanza dall'asse;
- b) le correnti amperiane presenti e il valore;
- c) la carica (totale che scorre nella spira) misurata dal galvanometro balistico quando si estrae rapidamente il cilindro ferromagnetico dall'interno del solenoide;
- d) il lavoro fatto da una forza esterna, diretta lungo l'asse del sistema, per estrarre il cilindro non considerando la presenza della spira connessa al galvanometro.

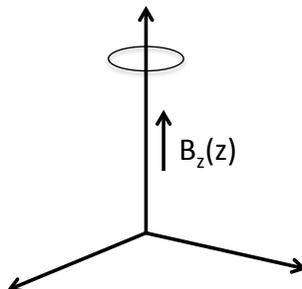


Esercizio 2

Un piccolo anello isolante di raggio  $r = 1$  cm, massa  $m_g = 2$  mg con una carica distribuita uniformemente  $Q = 2\pi r\lambda = 2.0 \cdot 10^{-6}$  C, è posto in posizione orizzontale centrato sull'asse  $z$ . Intorno all'asse  $z$  è presente un campo di induzione magnetica, simmetrico rispetto all'asse, con componente  $B_z(z) = \beta(h - z)$ , con  $\beta = 1.5$  T/m, da considerarsi la stessa sulle dimensioni della spira. L'anello viene lasciato libero di cadere da fermo dall'altezza  $h = 1.2$  m e mentre cade inizia a ruotare intorno al suo asse. Si determinino:

- a) la velocità di rotazione  $\omega$  in funzione di  $z$  e il suo valore in  $z = 0$ ;
- b) l'energia di interazione dell'anello ruotante col campo magnetico in funzione della posizione  $z$ ;
- c) l'espressione della forza magnetica agente sull'anello nella direzione verticale;
- d) l'equazione del moto di caduta.

(Se utile si osservi che  $dz = v dt$ ; il momento d'inerzia dell'anello rispetto al suo asse è:  $I = m_g r^2$ .)



# Soluzione secondo esonero Elettromagnetismo

June 16, 2016

## 1 Esercizio 1

a) All'interno del solenoide il valore del campo  $H$  è uniforme, assiale, e dipende dalla densità di spire e dalla corrente che scorre in queste

$$H = nI = \frac{N}{l}I = 1.0 \times 10^3 \text{ A/m} \quad \text{per } r < r_s .$$

Il campo di induzione magnetica  $B$  è proporzionale ad  $H$  e vale

$$B_0 = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N I}{l} = 4\pi \times 10^{-7} H = 1.3 \times 10^{-3} \text{ T} \quad \text{per } r_c < r < r_s$$

nella regione vuota tra il cilindro di ferro e le spire del solenoide e

$$B = \mu_r \mu_0 H = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l} = \mu_r B_0 = 100 \times 1.3 \times 10^{-3} = 1.3 \times 10^{-1} \text{ T} \quad \text{per } r < r_c$$

all'interno del cilindro di ferro. Dalla definizione della magnetizzazione

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = (\mu_r - 1)H = \frac{(\mu_r - 1)N I}{l} = 9.9 \times 10^4 \text{ A/m}$$

ed è non nulla solo all'interno del cilindro di ferro, per  $r < r_c$ .

b) La densità di corrente amperiana di superficie valgono

$$j_s = \vec{M} \times \hat{n} = |M| \hat{\phi} = \frac{(\mu_r - 1)N I}{l} \hat{\phi} = 9.9 \times 10^4 \text{ A/m}$$

$$I_s = j_s l = 1.5 \times 10^5 \text{ A}$$

e scorre in direzione tangenziale sulla superficie laterale del cilindro. La densità di corrente amperiana di volume sia per il fatto che il mezzo è omogeneo, sia se si calcola esplicitamente (in coordinate cilindriche)

$$j_V = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 .$$

c) Per calcolare la carica totale misurata dal galvanometro si può applicare la legge di Felici sapendo che

$$\Phi_i = B_0(\pi\rho^2 - \pi r_c^2) + \mu_r B_0 \pi r_c^2 \quad \Phi_f = B_0 \pi \rho^2 ,$$

quindi

$$Q = \frac{1}{R}(\Phi_i - \Phi_f) = \frac{1}{R} B_0 \pi r_c^2 (\mu_r - 1) = 1.6 \times 10^{-5} \text{ C}$$

d) Il lavoro fatto dalla forza esterna è pari all'opposto della variazione dell'energia magnetica, di cui basta considerare il contributo che varia nell'estrazione del cilindro di ferro, ovvero quella contenuta nel volume occupato dal cilindro stesso

$$L_{ext} = -\Delta U_m = -\frac{1}{2} B_0 H \pi r_c^2 l + \frac{1}{2} B H \pi r_c^2 l = \frac{1}{2} \pi r_c^2 l \mu_0 \left( \frac{N I}{l} \right)^2 (\mu_r - 1) = 1.2 \times 10^{-1} \text{ J}$$

L'energia magnetica nella regione tra cilindro e solenoide non varia quindi si cancella nel calcolo di  $\Delta U_m$ .

## 2 Esercizio 2

a) La variazione di flusso magnetico nella spira produce un campo elettromotore che spinge le cariche dell'anello in direzione tangenziale<sup>1</sup>. Applicando l'equazione di Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad 2\pi r E(r) = -\frac{d}{dt} (\pi r^2 B(z)) = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} \quad E(r) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt} = \frac{r}{2} \beta \frac{dz}{dt} .$$

Il momento che la forza genera sull'asse dell'anello è

$$\vec{M} = \int_0^{2\pi} dq \hat{dl} \times \vec{E} = \int_0^{2\pi} \lambda r d\phi \vec{r} \times \vec{E}(r) = \lambda r^3 \pi \frac{dB_z}{dt}$$

e l'equazione del moto è quindi

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi \lambda r^3}{I} \frac{dB_z}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega(z) - \omega_0 = -\frac{\pi \lambda r^3}{I} (B(z) - B(h)) = -\frac{Q r^3}{2I} (B(z) - B(h))$$

che, considerando che  $\omega_0 = 0$  e  $B_z(h) = 0$  diventa

$$\omega(z) = -\frac{\pi \lambda r^3}{I} B(z) = -\frac{Q}{2m_g} \beta (h - z) .$$

Il valore in  $z = 0$  è  $\omega(0) = -\frac{Q}{2m_g} \beta h = -0.9$  rad/s. Il segno meno indica che la rotazione è nel verso orario e il vettore della velocità angolare punta verso il basso.

Allo stesso risultato si può giungere considerando che sulle cariche dell'anello in caduta agisce una forza di Lorentz dovuta al campo magnetico: questo non ha solamente componente lungo  $z$  (data) ma ha anche una componente radiale che si può ricavare sapendo che deve essere  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  ed è quindi legata alla componente verticale. Questa componente è quella che produce un moto tangenziale delle cariche presenti nell'isolante e quindi mette in moto l'anello. Il momento prodotto da questa forza di Lorentz è lo stesso trovato sopra e porta allo stesso risultato finale.

b) L'anello rotante dotato di carica equivale ad una spira percorsa da corrente ed ha quindi un momento magnetico  $m$  pari a

$$m = \frac{dQ}{dt} \pi r^2 = \frac{Q}{T} \pi r^2 = \frac{\lambda 2\pi r \omega}{2\pi} \pi r^2 = \lambda \omega \pi r^3 = \frac{Q \omega(z) r^2}{2}$$

quindi l'energia magnetica si può calcolare come

$$U_m(z) = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\lambda r^3 \pi \omega(z) B(z) = \lambda r^3 \pi \frac{\lambda \pi r^3}{I} B^2(z) = \frac{Q^2 \beta^2 r^2}{4m_g} (h - z)^2$$

che dipende dalla posizione  $z$ .

c) Da quanto trovato sinora consegue la presenza di una forza magnetica agente sulla spira (equivalente a un momento magnetico  $\vec{m}$ ) diretta lungo  $z$  (verso l'alto) data da

$$F = -\nabla U_m = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \frac{d}{dz} \left( -\frac{Q^2 \beta^2 r^2}{4m_g} (h - z)^2 \right) = \frac{Q^2 \beta^2 r^2}{2m_g} (h - z) ,$$

anch'essa dipendente dalla quota  $z$ .

d) Considerando le forze agenti nella direzione  $z$  (prendendo un asse positivo verso l'alto) si può scrivere l'equazione del moto di caduta

$$m_g \frac{dv}{dt} = m_g \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_g g + F_m = -m_g g + \frac{Q^2 \beta^2 r^2}{2m_g} (h - z) .$$

Volendo si può notare che il secondo termine della forza è molto minore della forza peso quindi, almeno nel tragitto tra la quota  $h$  da cui parte l'anello ed il suolo a  $z = 0$ , il moto è uniformemente accelerato con accelerazione sostanzialmente pari a  $g$ <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Se fosse un materiale conduttore le cariche produrrebbero una corrente all'interno dell'anello ma essendo isolante, e le cariche presenti solidali con l'anello, la forza che sposta le cariche fa ruotare l'intero anello.

<sup>2</sup>Nel caso in cui l'anello potesse sprofondare a  $z < 0$  e supponendo in quella regione il campo  $B_z$  continuasse ad avere la stessa forma analitica, il moto finale sarebbe quello di un oscillatore attorno ad una posizione di equilibrio a  $z \ll 0$ .