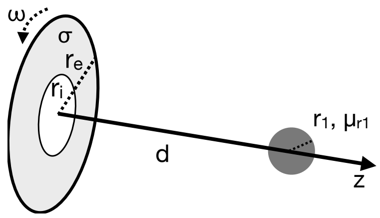
Prova Esonero Elettromagnetismo - 8.6.2018

(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

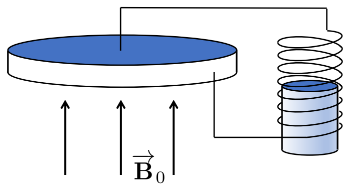
Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1



Una corona circolare rigida isolante di raggio interno $r_i = 1.0\,\text{mm}$ e raggio esterno $r_e = 10.0\,\text{cm}$ è carica elettricamente con una densità di carica superficiale radiale $\sigma(r) = \alpha_0/r^3$ con $\alpha_0 = 5.0 \cdot 10^{-2}\,\text{Cm}$. Il sistema ruota intorno al proprio asse (z) con velocità angolare $\omega = 50 \cdot 10^3\,\text{rad/s}$ come indicato in figura.
Determinare:
a) il momento di dipolo magnetico della corona circolare $\mathbf{m}$, indicandone modulo, direzione e verso;
b) il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ generato dalla corona circolare in tutti i punti dell'asse z e calcolarne il valore numerico nel punto a distanza $z = d = 0.5\,\text{m}$.
Una piccola sfera di raggio $r_0 = 5.0\,\text{cm}$ costituita da materiale magnetico di permeabilità magnetica relativa μ_r si trova sull'asse z a distanza $d = 0.5\,\text{m}$ ($d \gg r_0, r_i, r_e$) dalla corona circolare. Sapendo che la sferetta viene attratta dalla corona con una forza $F_0 = 1.0 \cdot 10^{-2}\,\text{N}$:
c) dire di quale tipo di sostanza magnetica è formata la sferetta e determinare il valore di μ_r (si assuma una magnetizzazione uniforme sul volume della sferetta).

Esercizio 2



Un disco conduttore di raggio $a = 15$ cm può ruotare attorno al suo asse, ed è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme $\mathbf{B}_0$=0.65 T. Il disco viene connesso, tramite due contatti striscianti, ad un circuito con un solenoide, come in figura. All'interno del solenoide è posto, parzialemente inserito, un nucleo di materiale ferromagnetico, ben approssimabile come un materiale con permeabilità magnetica relativa μ_r=240, e massa $M = 450$ g, poggiato al suolo. Il solenoide ha lunghezza $\ell = 12.0$ cm, raggio $r = 1.5$ cm, ed è composto da $n = 20000$ spire/m. Il materiale ferromagnetico è inserito nel solenoide per la lunghezza $x_0 = 1.0$ cm. Il sistema ha una resistenza $R = 0.60\ \Omega$. Nell'istante $t = 0$ il disco viene messo in rotazione con velocità angolare ω costante. Si calcoli:
a) l'induttanza del solenoide, approssimandolo come due solenoidi in serie;
b) la minima velocità angolare ω_0 per cui il blocco di materiale ferromagnetico si solleva da terra;
c) la legge di evoluzione della corrente nel circuito, in funzione del tempo, nel caso $\omega = \omega_0/2$, specificando i valori numerici importanti;
d) la potenza erogata dal motore per mantenere in moto il disco, nel caso $\omega = \omega_0/2$.

Soluzione 1

a)

Il disco carico rotante dal punto può essere schematizzato come un insieme di spire (con raggio r e larghezza dr) di carica $dq = \sigma dS$ e percorse dalal corrente $di = dq/T$ con T il periodo di rotazione del disco:

$$\begin{aligned} dq &= \sigma 2\pi r dr \\ di &= \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \alpha_0 \omega \frac{dr}{r^2}. \end{aligned}$$

Ogni spira produrrà un momento di dipolo magnetico dm diretto nella direzione positiva dell'asse z, risultando nel momento di dipolo totale:

$$\begin{aligned} dm &= di \pi r^2; \\ \mathbf{m} &= \hat{z}\alpha_0\omega\pi \int_{r_i}^{r_e} dr = \hat{z}\alpha_0\omega\pi(r_e - r_i) = 777.5\, Am^2; \end{aligned}$$

b)
Ogni spira produrrà sull'asse z un campo di induzione magnetica dB:

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\alpha_0\omega}{2}\frac{dr}{(r^2+z^2)^{3/2}};$$

Il campo totale è ottenibile sommando (integrando) i contributi di tutte le spire elementari:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \hat{z}\frac{\mu_0\alpha_0\omega}{2}\int_{r_i}^{r_e}\frac{dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\frac{\mu_0\alpha_0\omega}{2}\frac{1}{z^2}\left(\frac{r_e}{(r_e^2+z^2)^{1/2}} - \frac{r_i}{(r_i^2+z^2)^{1/2}}\right) \\ B(d) &\simeq \hat{z}\frac{\mu_0\alpha_0\omega}{2}\frac{1}{d^3}(r_e - r_i) = 1.2\, 10^{-3}\, T \end{aligned}$$

c)
La sferetta si polarizza a causa di B, con vettore polarizzazione magnetica e momento di dipolo:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H(d)} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0\mu_r}\mathbf{B(d)}; \\ \mathbf{m}_s &= \mathbf{M}\frac{4}{3}\pi r_0^3. \end{aligned}$$

La forza lungo z agente sulla sferetta è c=ottenibile a partire dall'energia di interazione del dipolo m_s con il campo magnetico $B(d)$:

$$\begin{aligned} U &= -\mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{3}\pi r_0^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r}\frac{\mu_0\alpha_0^2\omega^2(r_e - r_i)^2}{z^6}; \\ F &= F_z = -\frac{dU}{dz} = -2\pi r_0^3\frac{\mu_r - 1}{\mu_r}\frac{\mu_0\alpha_0^2\omega^2(r_e-r_i)^2}{z^7} = A\frac{\mu_r - 1}{\mu_r}. \end{aligned}$$

La forza ($F < 0$ attrattiva implica una una sostanza ferromagnetica o paramagnetica, la permeabilità può essere ottenuta dalla forza F uguagliandola alla forza F_0:

$$\mu_r = \frac{A}{A - F_0};$$

NOTA con i risultati numerici forniti si ottiene un risultato inconsistente ($\mu_r \;\; -3$). La ragione dell'inconsistenza è legata ad un errore di arrotondamento nel valore di F_0 riportato sul testo ($1 \cdot 10^{-2}$ N invece che $7.73598 \cdot 10^{-3}$ N). Usando il valore corretto si ottiene $\mu_r = 3 \cdot 10^3$ proprio di una sostanza ferromagnetica.

Soluzione 2

a) Approssimando l'induttanza come quella di due induttanze in serie abbiamo

$$L_1 = \mu_0 \pi r^2 n^2 (\ell - x) \tag{1}$$

$$L_2 = \mu_0 \mu_r \pi r^2 n^2 x \tag{2}$$

quindi

$$L = \mu_0 \pi r^2 n^2 (\ell + (\mu_r - 1)x) = 0.89 \text{ Henry} \tag{3}$$

b) il nucleo si solleva quando la forza magnetica supera la forza peso. La forza magnetica vale:

$$F_M = +\frac{dU_M}{dx}$$

dove l'energia magnetica vale $U_M = \frac{1}{2}L(x)I^2$.
Quindi

$$F_M = \frac{1}{2}I^2\frac{dL(x)}{dx} = \frac{I^2}{2}\mu_0\pi r^2 n^2(\mu_r - 1)$$

La corrente che scorre nel circuito, vale a regime

$$I_{max} = fem/R$$

dove la forza elettromotrice è indotta dal flusso tagliato nel disco:

$$fem = \frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{1}{2}B_0 a^2 \omega_0$$

Quindi

$$I_{max} = \frac{B_0 a^2 \omega_0}{2R}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8R^2 Mg}{B_0^2 a^4 \mu_0 \pi r^2 n^2 (\mu_r - 1)}} = 26.5 \text{ rad/s}$$

c) Si tratta di un circuito RL, in cui il generatore è dato dalla fem indotta dal flusso tagliato. L'equazione del circuito è:

$$fem = L\frac{dI}{dt} + RI$$

Quindi

$$\frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = \frac{fem}{R} - I$$

La soluzione è

$$I(t) = I_{max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

con

$$I_{max} = \frac{fem}{R} = \frac{B_0 a^2 \omega_0}{4R} = 0.16 \text{ A}$$

e

$$\tau = L/R = 1.49 \text{ s}$$

d)

$$W = fem^2/R = 15.6 \text{ mW}$$