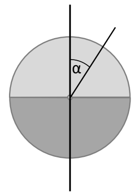
Prova Esonero Elettromagnetismo - 12.04.2019

(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

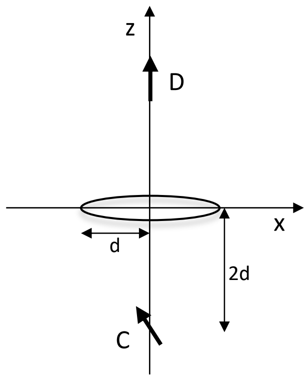
Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 2.5 ore.

Esercizio 1

In una sferetta di massa $m = 10$ g e di raggio $R = 1.0\,\mathrm{cm}$ è distribuita una carica elettrica con densità $\rho = a\cos\alpha/r^2$ dove α è l'angolo rispetto all'asse di simmetria della distribuzione sferica.

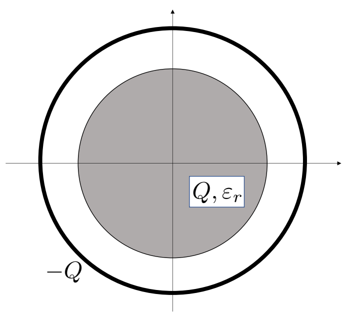


a) Sapendo che la carica totale positiva è $Q = 1.0\,\mathrm{nC}$, si determini a;
b) si calcoli poi il momento di dipolo elettrico della sferetta.
La sferetta viene inizialmente vincolata con il suo centro sull'asse z in posizione C a $z_0 = -2d$, con $d = 20\,\mathrm{cm}$, nel campo formato da un anello carico negativamente, di carica totale $q = -10\,\mathrm{nC}$, di raggio d, centrato sull'asse z, giacente sul piano (x, y).
c) Si determini il periodo delle piccole oscillazioni della sferetta se il suo asse viene allontanato di un piccolo angolo θ dalla direzione dell'asse z sapendo che il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro e ortogonale a quello di simmetria è $I = 4.0\,\mathrm{g\,cm^2}$;
d) si determini la velocità finale (a distanza infinita) della sferetta se, orientata col dipolo nella direzione $\hat{z}$, viene lasciata libera di muoversi da ferma (lungo l'asse z) dalla posizione D a $z = 2d$.
- *Addendum non nel compito:*
Si determini in quali punti dell'asse z la forza sul dipolo è nulla.
Si dica dove la forza è positiva e dove è negativa e si dia una spiegazione.



Esercizio 2

Una sfera di materiale dielettrico, con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 1.5$ e raggio $R_1 = 9.0\,\mathrm{cm}$, è caricata internamente con una carica totale $Q = 2.5\,\mathrm{nC}$, distribuita in modo uniforme in tutto il volume occupato dalla sfera. Esternamente alla sfera, è presente un guscio sferico conduttore, di raggio $R_2 = 12\,\mathrm{cm}$ su cui è disposta la carica $Q_2 = -Q$. Il guscio è concentrico alla sfera.
Determinare:
a) l'andamento del vettore polarizzazione $\vec{P}$ all'interno della sfera;
b) le cariche di polarizzazione ρ_p e σ_p nel sistema, con i loro valori numerici, e il valore totale della carica di polarizzazione Q_p;
c) l'andamento del campo elettrostatico in tutto lo spazio;
d) l'andamento del potenziale elettrostatico in tutto lo spazio, calcolando il valore V_0 del potenziale nel centro della sfera.



Soluzione 1

a) Le cariche positiva e negativa sono distribuite in modo simmetrico rispetto al piano equatoriale della sferetta. Sono quindi uguali ed opposte. Integrando la distribuzione di carica nell'emisfero positivo si trova:

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho\, r^2\, dr\, d\varphi\, \sin\alpha\, d\alpha = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a}{r^2} \cos\alpha\, r^2\, dr\, d\varphi\, \sin\alpha\, d\alpha$$

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^1 a \cos\alpha\, dr\, d\varphi\, d\cos\alpha = aR2\pi\frac{Q}{2} = \pi a R \qquad a = \frac{Q}{\pi R} = 31.8\,\mathrm{nC/m}$$

b) La distribuzione di carica è simmetrica rispetto all'asse della sferetta perpendicolare al piano che divide le cariche di segno opposto, quindi l'unica componente del momento di dipolo non nulla è nella direzione di quest'asse.

$$p = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q}{\pi R} \frac{\cos\alpha}{r^2} (r\cos\alpha)\, r^2 dr\, d\varphi\, d\cos\alpha = \frac{Q}{\pi R}\frac{1}{2} R^2\, 2\pi\, \frac{2}{3} = \frac{2}{3} QR = 6.67\cdot 10^{-12}\ \mathrm{C\,m}$$

c) Il momento meccanico agente su un dipolo $\vec{p}$ in un campo elettrico $\vec{E}$ è $\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$.
Sull'asse z il campo elettrico generato dall'anello carico negativamente ha la sola componente z. Componendo i campi, si trova facilmente:

$$E(z) = -\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{[z^2+d^2]^{\frac{3}{2}}}$$

e questo in $z = -2d$ vale:

$$E(-2d) = \frac{|q|}{2\pi\epsilon_0 5^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{d^2} = 400\,\mathrm{V/m}$$

Se θ è l'angolo tra il dipolo e quest'asse, il periodo delle piccole oscillazioni si trova dalla seconda equazione cardinale:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE\sin\theta \qquad \text{e per piccole oscillazioni:} \qquad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + pE\theta = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3I}{2QRE}} = 2\pi d\sqrt{\frac{3\cdot 5^{\frac{3}{2}}\pi\epsilon_0 I}{|q|QR}} = 77\,\mathrm{s}$$

d) Ponendolo in $z = 2d$ il dipolo sente una forza positiva e la sua energia cinetica finale è:

$$\frac{1}{2}mv^2 = U(z=2d) - U(z=\infty) = -pE_z(2d) = \frac{p\,|q|}{2\pi\epsilon_0 5^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{d^2}$$

$$v = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{2}{3\cdot 5^{\frac{3}{2}}}\frac{|q|QR}{\pi\epsilon_0 m}} = 73.2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s}$$

La forza agente sul dipolo è:

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} \quad \rightarrow \quad F_z = p\frac{\partial}{\partial z}E_z = -\frac{p\,|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{d^2-2z^2}{[z^2+d^2]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{|q|\,QR}{6\pi\epsilon_0}\frac{d^2-2z^2}{[z^2+d^2]^{\frac{5}{2}}}$$

questa è positiva per $|z| > d/\sqrt{2}$, è negativa per $|z| < d/\sqrt{2}$ e si annulla in $z = \pm d/\sqrt{2}$: la forza sul dipolo non dipende dal campo elettrico ma dal gradiente del campo elettrico!

Soluzione 2

a)
Sulla sfera è disposta una densità di carica localizzata

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R_1^3}$$

Si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Applicando il teorema di Gauss al campo $\vec{D}$, ricaviamo

$$\vec{D} = \frac{\rho}{3}\vec{r}$$

da cui

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{r}$$

Il vettore $\vec{P}$ può essere calcolato come:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

dove $\chi = \varepsilon_r - 1$ quindi

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\rho}{3}\vec{r}$$

Esplicitando in funzione dei dati:

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{R_1^3}$$

Alternativamente, dalle definizione $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} - \vec{P}$ possiamo calcolare

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

giungendo allo stesso risultato.

b) le cariche di polarizzazione volumiche ρ_p si possono calcolare ricordando che:

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla}(\varepsilon_0 \chi \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \chi \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\right) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

Ricordando che $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, si ha

$$\rho_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{3Q}{4\pi R_1^3} = -273\,\mathrm{nC/m^3}$$

Alternativamente, è possibile calcolare $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ esplicitamente, in coordinare sferiche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 D_r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{\rho}{3} r\right) = \rho$$

Le cariche di polarizzazione superficiali possono essere calcolate come:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = P(R_1) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R_1^2} = 8.2\,\mathrm{nC/m^2}$$

. La carica totale di polarizzazione Q_p vale

$$Q_p = \frac{4\pi R_1^3}{3}\rho_p + 4\pi R_1^2 \sigma_p = -\frac{4\pi R_1^3}{3}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{3Q}{4\pi R_1^3} + 4\pi R_1^2 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R_1^2} = 0$$

c)
Il campo elettrico nella sfera è già stato calcolato nella risposta alla domanda (a); il campo elettrico all'esterno del guscio è nullo, in quanto la carica totale contenuta in una sfera di raggio $r > R_3$ è nulla; per il teroema di Gauss, il campo tra sfera è

guscio è equivalente al campo generato dalla carica Q posta nell'origine.
Quindi il campo elettrico vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R_1^3}\vec{r} & \text{per } r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r} & \text{per } R_1 \leq r < R_2 \\ 0 & \text{per } r \geq R_2 \end{cases}$$

d)
Il potenziale in un punto generico r rispetto all'infinito vale:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = +\int_{r}^{\infty} E_r(r')dr'$$

Quindi, all'esterno della sfera:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r \geq R_3 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) & \text{per } r = R_1 \end{cases}$$

mentre nel tratto interno alla sfera,

$$V(r) = \int_{r}^{R_1} E_r(r')dr' + V(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R_1^3}\int_{r}^{R_1} r'dr' + V(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R_1^3}\frac{R_1^2 - r^2}{2} + V(R_1)$$

da cui

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_r R_1} - \frac{r^2}{2\varepsilon_r R_1^3} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{per } r < R_1$$

Al centro della sfera:

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_r R_1} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 146\,\mathrm{V}$$