**Prova Esonero Elettromagnetismo - 14.06.2019**

*(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)*

---

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 2.5 ore.

---

**Esercizio 1**

Su due nastri conduttori paralleli di larghezza $a = 10$ cm e distanti $b = 4$ mm, scorrono due correnti di intensità $I = 10$ A in direzione opposta distribuite uniformemente sulla larghezza. Tra i nastri, separati da strati di materiale isolante di spessore trascurabile, si trovano due materiali ferromagnetici di stesso spessore, caratterizzati da $\mu_{r1} = 300$ e $\mu_{r2} = 100$, come mostrato in figura.

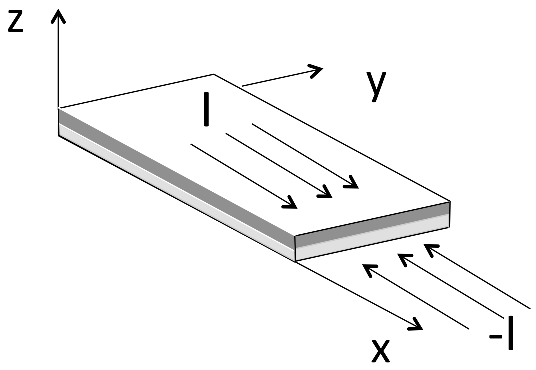
Si determinino:

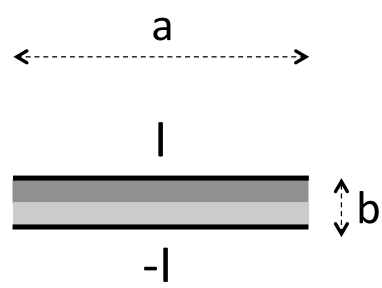
a) i campi $\vec{H}, \vec{B}$ e $\vec{M}$ nei due mezzi ferromagnetici dandone le componenti e i valori.

b) le correnti amperiane presenti: densità e valori totali indicando dove si trovano e le loro direzioni.

c) il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza del sistema conduttori-sostanze magnetiche.

*- Si trascurino gli effetti di bordo (si assuma $b << a$)*




**Esercizio 2**

Un condensatore con armature circolari di raggio $r_2 = 15\,\text{cm}$ separate da una distanza $d = 5.0\,\text{mm}$ è connesso ad un generatore di forza elettromotrice alternata $f = V_0 \cos \omega t$, con $\omega = 314 \cdot 10^3\,\text{rad/s}$ e $V_0 = 220\,\text{V}$. Tra le armature, al centro del condensatore, è presente un cilindro resistivo coassiale con condensatore, di raggio $r_1 = 5\,\text{cm}$, resistività $\rho = 1.0 \cdot 10^5\,\Omega\text{m}$, costante dielettrica $\epsilon_0$ e permeabilità magnetica $\mu_0$. Si calcoli:

a) la corrente di conduzione che scorre nel cilindro centrale in funzione del tempo, e il suo valore massimo;

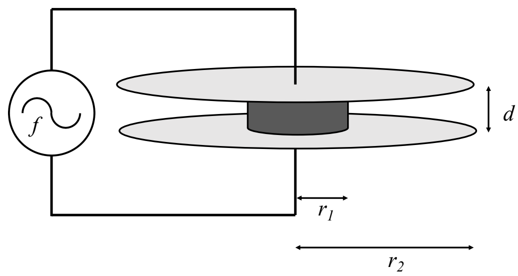
b) la corrente di spostamento in funzione del tempo, e il suo valore massimo;

c) il campo di induzione magnetica interno al condensatore, in funzione della distanza dal suo asse, e del tempo;

d) il valore medio del flusso del vettore di Poynting sulla superficie laterale del condensatore;

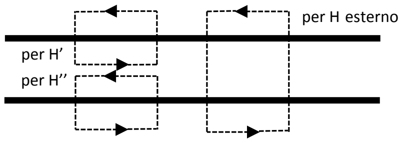
e) il valor medio del flusso del vettore di Poynting sulla superficie laterale del cilindro resistivo.

*- Si trascuri la $fem$ autoindotta; si suggerisce di definire un asse z diretto verso l'alto al fine di identificare il verso delle correnti e dei campi.*



**Soluzione 1**

**a)** Trascurando gli effetti di bordo ($b << a$) si comprende, per ragioni di simmetria, che tra i due conduttori il campo $H$ è diretto in direzione $y$. Ció soddisfa anche la condizione di raccordo ($H_{t1} = H_{t2}$) alla superficie di divisione tra i due mezzi ferromagnetici. Applicando il teorema della circuitazione a ciascun nastro e sommando i contributi $H'$ e $H''$, che tra i conduttori




sono uguali e concordi, si trova il campo magnetico $H$:

$$H' \cdot 2l = \frac{I}{a} l \qquad - H'' \cdot 2l = \frac{-I}{a} l \qquad H' = H'' = \frac{I}{2a} \qquad H = H' + H'' = \frac{I}{a} = 100 \text{ A/m}$$

All'esterno il campo $H_{est}$ è nullo: $\quad 2H_{est} l = I - I = 0$

Il campo $B$ nei due materiali ferromagnetici ha stessa direzione e moduli:

$$B_1 = \mu_1 H = 3.77 \cdot 10^{-2} \text{ Tesla} \qquad\qquad B_2 = \mu_2 H = 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ Tesla}$$

L'intensità di magnetizzazione con stessa direzione ha moduli:

$$M_1 = \chi_{m_1} H = (\mu_{r1} - 1) H = 29.9 \text{ kA/m} \qquad\qquad M_2 = \chi_{m_2} H = (\mu_{r2} - 1) H = 9.9 \text{ kA/m}$$

**b)** I materiali sono caratterizzati da permeabilità magnetiche uniformi quindi non ci sono correnti amperiane di volume. Sulle superfici dei due materiali parallele al piano $xy$ scorrono correnti amperiane di superficie.

- Per il materiale 1:

$$\text{sulla faccia a } z = b \quad \vec{J}_{ms} = \vec{M}_1 \times \hat{z} = M_1 \hat{x} \qquad I_1(z = b) = M_1 a = 2990 \text{ A} \quad \text{in direzione } x$$

$$\text{sulla faccia a } z = \frac{b}{2} \quad \vec{J}_{ms} = \vec{M}_1 \times (-\hat{z}) = -M_1 \hat{x} \qquad I_1(z = b/2) = -M_1 a \quad \text{in direzione } -x$$

- Per il materiale 2:

$$\text{sulla faccia a } z = \frac{b}{2} \quad \vec{J}_{ms} = \vec{M}_2 \times \hat{z} = M_2 \hat{x} \qquad I_1(z = b/2) = M_2 a = 990 \text{ A} \quad \text{in direzione } x$$

$$\text{sulla faccia a } z = 0 \quad \vec{J}_{ms} = \vec{M}_2 \times (-\hat{z}) = -M_2 \hat{x} \qquad I_1(z = b) = -M_2 a \quad \text{in direzione } -x$$

**c)** Tra i due conduttori il flusso del campo $B$ calcolato su un piano parallelo al piano $xz$ per un tratto $l$ di circuito è:

$$\Phi(B) = \frac{b}{2} l B_1 + \frac{b}{2} l B_2 = \frac{b}{2} l \left(\mu_1 + \mu_2\right) \frac{I}{a}$$

Il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza è:

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{l} \frac{\Phi}{I} = \frac{b}{2a} \left(\mu_1 + \mu_2\right) = 10 \ \mu\text{H/m}$$

**Soluzione 2**

a) Il conduttore ha resistenza

$$R = \rho \frac{d}{\pi r_1^2} = 63.6 \,\text{k}\Omega$$

quindi la corrente che scorre nel conduttore vale

$$I = -\frac{f}{R} = -\frac{V_0}{R} \cos \omega t$$

con valore massimo

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = 3.46 \,\text{mA}$$

Tale corrente è diretta verso il basso per $0 < t < T/2$, con $T$ periodo della forza elettromotrice.
b)
La componente verticale del campo elettrico all'interno del condensatore vale

$$E_z(t) = -\frac{V_0}{d}\cos\omega t,$$

e la densità di corrente di spostamento vale

$$J_s = \varepsilon_0\frac{dE}{dT} = \varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t.$$

La corrente di spostamento è:

$$I_s = J_s\pi r_2^2 = \varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\pi r_2^2\sin\omega t$$

Il valore di picco vale

$$I_{s0} = \varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\pi r_2^2 = 8.65\,\mathrm{mA}.$$

c)
Il campo di induzione magnetica interno al condensatore di calcola utilizzando la IV equazione di Maxwell in forma integrale, sfruttando la simmetria cilindrica del problema:

$$2\pi rB = \mu_0(J + J_s)\pi r^2 \qquad (\text{per } r < r_1)$$

$$2\pi rB = \mu_0(I + J_s\pi r^2) \qquad (\text{per } r > r_1)$$

Il campo di induzione magnetica ha solo componente azimutale $B_\phi$. La densità di corrente di conduzione vale $J = I/\pi r_1^2$. Si ha:

$$B_\phi(t,r) = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{\pi r_1^2} + J_s\right)r \qquad (\text{per } r < r_1)$$

$$B_\phi(t,r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 J_s r}{2} \qquad (\text{per } r > r_1)$$

Abbiamo quindi :

$$B_\phi(t,r) = \frac{\mu_0}{2}\left(-\frac{V_0}{\pi r_1^2 R}\cos\omega t + \varepsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t\right)r \qquad (\text{per } r < r_1)$$

$$B_\phi(t,r) = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\cos\omega t + \frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{V_0\omega r}{d}\sin\omega t \qquad (\text{per } r_1 < r < r_2)$$

* Si può calcolare il campo magnetico dalla IV equazione di Maxwell. Poiché la densità di corrente ha direzione $z$ è sufficiente scrivere l'equazione solo lungo questa direzione tenendo conto della simmetria assiale ($B$ non dipende da $\varphi$):

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial\varphi}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,B_\varphi)$$

Per $r \le r_1$ si hanno correnti di spostamento e di conduzione:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,B_\varphi) = \mu_0(J_{sz} + J)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,B_\varphi) = \mu_0\epsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t - \mu_0\frac{I_0}{\pi r_1^2 d}\cos\omega t$$

e integrando:

$$B_\varphi(r) = \frac{1}{2}r\left[\mu_0\epsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t - \mu_0\frac{I_0}{\pi r_1^2}\cos\omega t\right]$$

Per $r_1 \le r \le r_2$ solo corrente di conduzione:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,B_\varphi) = \mu_0\,J_{sz}$$

integrando tra $r_1$ e $r$:

$$rB_\varphi(r) - r_1B_\varphi(r_1) = \frac{1}{2}(r^2 - r_1^2)\left(\mu_0\epsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t\right)$$

e sostituendo $B_\varphi(r_1)$ dalla formula per $r = r_1$:

$$B_\varphi(r) = \frac{1}{2} r \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \omega \sin \omega t \right) - \mu_0 \frac{I_0}{2\pi r} \cos \omega t$$

d)
Il vettore di Poynting è:

$$\vec{I} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Sulla superficie laterale del condensatore ($r = r_2$), si trova:

$$I(r = r_2, t) = -\frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right) \left( -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_2} \cos \omega t + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{V_0 \omega r_2}{d} \sin \omega t \right)$$

Nel calcolare il valor medio nel tempo, rimane solo la parte da $\cos^2 \omega t$, e il flusso medio risulta:

$$\langle \Phi(I(r_2)) \rangle_T = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{dR} \frac{1}{2\pi r_2} \cdot 2\pi r_2 \, d = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = -\frac{V_{eff}^2}{R} = -380 \, \mathrm{mW}$$

cioé la potenza dissipata nel cilindro resistivo.
Per $r = r_1$:

$$I(r = r_1, t) = -\frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right) \left( -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_1} \cos \omega t + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{V_0 \omega r_1}{d} \sin \omega t \right)$$

e per il suo flusso medio a $r = r_1$:

$$\langle \Phi(I(r_1)) \rangle_T = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{dR} \frac{1}{2\pi r_1} \cdot 2\pi r_1 \, d = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = -\frac{V_{eff}^2}{R} = -380 \, \mathrm{mW}$$

chiaramente uguale a quanto trovato a $r = r_2$.
* Il valore medio del flusso del vettore di Poynting corrisponde all'energia dissipata nel resistore. L'altro termine presente nel flusso ma con valore medio nullo sul periodo corrisponde al flusso di energia per portare dentro e fuori dal volume tra le armature del condensatore l'energia elettrostatica essendo la d.d.p. sinusoidale.