Prova Esonero Elettromagnetismo - 16.04.2021
(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

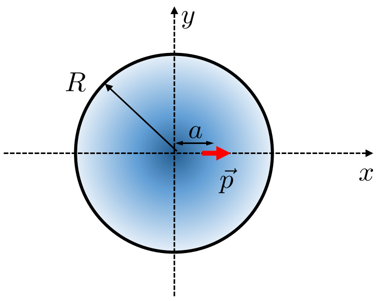
Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.
Il compito di esonero richiede la soluzione di 2 problemi.
Sul foglio distribuito sono dati 4 esercizi: 2 per il primo problema e 2 per il secondo.
Lo studente o la studentessa devono risolvere 2 esercizi dei 4 scelti nel modo seguente:
Preso il numero di matricola lo studente/la studentessa risolve i seguenti problemi:

Penultima cifra	0-4	Esercizio 1-a
Penultima cifra	5-9	Esercizio 1-b
Ultima cifra	0-4	Esercizio 2-a
Ultima cifra	5-9	Esercizio 2-b

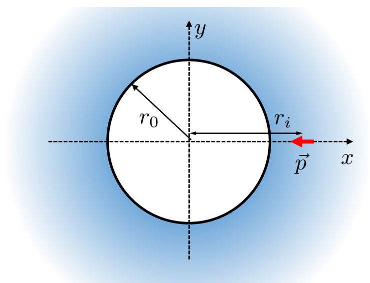
Compiti con esercizi non corrispondenti all'associazione detta non saranno considerati per la correzione.

Esercizio 1-a

Una sfera di raggio $R = 20\,\text{cm}$ di materiale isolante è carica con densità di carica $\rho = \rho_0(r/R)^\alpha$, con $\alpha > -2$ e $\rho_0 = 6.0 \times 10^{-7}\,\text{C/m}^3$. Si ricavi (utilizzando per i valori numerici $\alpha = -1.8$):
a) la carica totale Q della sfera;
b) il campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{r})$ in tutto lo spazio;
c) il potenziale elettrostatico $V(\vec{r})$ in tutto lo spazio, calcolandone il valore V_0 al centro della sfera;
Posto un dipolo elettrico di momento di dipolo $p = 4.0 \times 10^{-9}\,\text{Cm}$ posto a distanza $a = 3.0\,\text{cm}$ dal centro, orientato in direzione radiale e verso uscente, si calcoli:
d) la forza che agisce sul dipolo;
e) il lavoro che è necessario compiere per portare il dipolo dalla sua posizione fino a distanza infinita.



Esercizio 1-b
In un materiale isolante, da considerarsi esteso a grande distanza (infinito), si ha una distribuzione di carica elettrica con densità $\rho(r) = 0$ per $r < r_0 = 2$ cm e $\rho(r) = \rho_0\,(r_0/r)^\alpha$ con $\alpha > 3$ e $\rho_0 = 6.6 \cdot 10^{-7}$ C/m^3 per $r > r_0$.
Si determinino (indicando i valori numerici per $\alpha = 4$):
a) la carica totale della distribuzione ;
b) l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ in tutto lo spazio;
c) il potenziale $V(\vec{r})$ in tutto lo spazio, e il suo valore numerico al centro di simmetria del sistema;
d) la forza agente su un dipolo elettrico diretto radialmente con momento di dipolo $\vec{p} = -p\,\hat{r}$ e $p = 4.8{\cdot}10^{-9}$ Cm, calcolandone il valore a distanza $r_i = 5$ cm dal centro;
e) l'energia cinetica finale del dipolo se lasciato libero dalla posizione r_i.



Esercizio 2-a

Un condensatore ha le due superfici cilindriche conduttrici di raggi $R_1 = 3$ cm e $R_3 = 8$ cm di lunghezza $l = 50$ cm, connesse a un generatore di potenziale costante $\Delta V = 1000$ V come in figura. Al loro interno tra $R_2 = 5$ cm e R_3, si trova una guaina dielettrica di lunghezza l, caratterizzata da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = \alpha r^2$ con r distanza dall'asse del sistema e $\alpha = 0.1$ cm^{-2}.

Si determini:

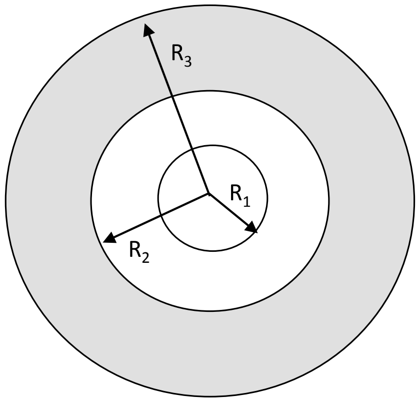
a) il campo elettrico in funzione della distanza dall'asse dandone un grafico;

b) le densità di carica di polarizzazione;

c) la forza per unità di superficie sulla superficie di raggio R_1;

d) il lavoro compiuto da una forza esterna per estrarre il dielettrico.

(Si trascurino gli effetti di bordo assumendo $l \gg R_3$)



Esercizio 2-b

Un condensatore ha le due superfici cilindriche conduttrici di raggi $R_1 = 3$ cm e $R_3 = 8$ cm di lunghezza $l = 50$ cm, connesse a un generatore di potenziale costante $V = 1000$ V come in figura. Al loro interno tra R_1 e $R_2 = 5$ cm si trova una guaina dielettrica di lunghezza l, caratterizzata da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = \alpha r^2$ con r distanza dall'asse del sistema e $\alpha = 0.2$ cm^{-2}.

Si determini:

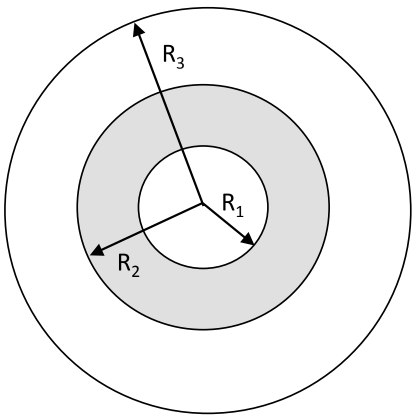
a) il campo elettrico in funzione della distanza dall'asse dandone un grafico;

b) le densità di carica di polarizzazione;

c) la forza per unità di superficie sulla superficie di raggio R_3;

d) il lavoro del generatore quando il dielettrico viene estratto.

(Si trascurino gli effetti di bordo assumendo $l \gg R_3$)



Soluzione 1-a
a)
La carica Q totale vale

$$Q = \int \rho(\vec{r})d\tau$$

Considerata la simmetria sferica, si ha

$$Q = \int_0^R \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{R^\alpha} \int_0^R r^{\alpha+2} dr = \frac{4\pi\rho_0}{R^\alpha}\frac{1}{\alpha+3}(R^{\alpha+3} - 0^{\alpha+3}) = \frac{4\pi\rho_0}{R^\alpha}\frac{R^{\alpha+3}}{\alpha+3} = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha+3}R^3 = 5.0 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

b)
Il campo elettrico ha andamento radiale, diverso all'interno e all'esterno della sfera di raggio R. Nella parte esterna, per il teorema di Gauss, vale

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi\rho_0}{\alpha+3}\frac{R^3}{r^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}\frac{R^3}{r^2} \qquad (r \geq R)$$

Internamente alla sfera, utilizzando il teorema di Gauss, si ha

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho_0 \left(\frac{r'}{R}\right)^\alpha 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0 R^\alpha(\alpha+3)} r^{3+\alpha}$$

e il campo vale

$$E_r(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^\alpha(\alpha+3)} r^{1+\alpha} \qquad (r < R)$$

c)
Il potenziale ha andamento radiale, e vale

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_r^\infty E_r(r')dr'$$

Esternamente alla sfera,

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}\frac{R^3}{r} \qquad (r > R)$$

Sulla superficie della sfera

$$V(R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}R^2 \qquad (r = R)$$

Internamente alla sfera

$$\begin{aligned} V(r) &= V(R) + \int_r^R E_r(r')dr' = V(R) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^\alpha(\alpha+3)}\int_r^R r'^{1+\alpha}dr' = \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}R^2 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^\alpha(\alpha+3)}\frac{R^{2+\alpha} - r^{2+\alpha}}{2+\alpha} \end{aligned}$$

Al centro della sfera ($r = 0$), si ha

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}R^2 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^\alpha(\alpha+3)}\frac{R^{2+\alpha}}{2+\alpha} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}R^2 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}\frac{R^2}{2+\alpha} \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}R^2\left(1 + \frac{1}{\alpha+2}\right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+3)}R^2\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right) \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha+2)}R^2 = 13.6 \times 10^3\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Notiamo che, se $-3 < r \leq -2$ il campo e il potenziale divergono nell'origine.
Se $-2 < r < -1$ il campo diverge, e il potenziale no.
d)
La forza sul dipolo vale

$$F = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$

Considerata la simmetria sferica, si ha

$$F_r = p\frac{dE_r}{dr}$$

utilizzando il campo interno alla sfera, si ha

$$F_r = p\frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^\alpha(\alpha+3)}\frac{d}{dr}(r^{\alpha+1})\Big|_{r=a} = \frac{\rho_0 p(\alpha+1)}{\epsilon_0(\alpha+3)}\left(\frac{a}{R}\right)^\alpha = -5.5\times 10^{-3}\,\mathrm{N}$$

in direzione entrante.
e)
L'energia del dipolo vale

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Quindi, considerando che campo e dipolo sono paralleli, il lavoro per portare il dipolo all'infinito vale:

$$L = -U = pE(a) = \frac{\rho_0 p}{\epsilon_0 R^\alpha(\alpha+3)}a^{1+\alpha} = 2.1\times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

Soluzione 1-b
La carica Q totale vale

$$Q = \int \rho(\vec{r})d\tau$$

Considerata la simmetria sferica, si ha

$$Q = \int_{r_0}^\infty \rho_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 r_0^\alpha\int_{r_0}^\infty r^{2-\alpha}dr = 4\pi\rho_0 r_0^\alpha\frac{1}{3-\alpha}(\infty^{3-\alpha} - r_0^{3-\alpha}) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha-3}r_0^3 = 6.6\times 10^{-11}\,\mathrm{C}$$

b)
Il campo elettrico ha andamento radiale, diverso all'interno e all'esterno della sfera di raggio r_0. Per il teorema di Gauss, internamente alla sfera il campo è nullo.

$$E_r(r) = 0 \qquad\qquad (r < r_0)$$

Esternamente alla sfera, sempre per il teorema di Gauss, si ha

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{r_0}^r 4\pi\rho_0 r_0^\alpha r'^{2-\alpha}dr' = \frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{\epsilon_0(\alpha-3)}(r_0^{3-\alpha} - r^{3-\alpha})$$

e il campo vale

$$E_r = \frac{\rho_0 r_0^\alpha}{\epsilon_0(\alpha-3)}\frac{r_0^{3-\alpha} - r^{3-\alpha}}{r^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha-3)}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 r_0 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha r\right] \qquad\qquad (r \geq r_0)$$

c)
Il potenziale ha andamento radiale, e vale

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_r^\infty E_r(r')dr'$$

Esternamente alla sfera,

$$V(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha-3)}\int_r^\infty\left[r_0^3 r'^{-2} - r_0^\alpha r'^{1-\alpha}\right]dr' = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha-3)}\left[r_0^3 r^{-1} - r_0^\alpha\frac{r^{2-\alpha}}{\alpha-2}\right] = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(\alpha-3)}\left[\frac{r_0}{r}r_0^2 - \frac{1}{\alpha-2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha r^2\right]$$

per $r = r_0$, si ha

$$V(r_0) = \frac{\rho_0 r_0^2}{\epsilon_0(\alpha-3)}\left(1 - \frac{1}{\alpha-2}\right) = \frac{\rho_0 r_0^2}{\epsilon_0(\alpha-3)}\frac{\alpha-3}{\alpha-2} = \frac{\rho_0 r_0^2}{\epsilon_0(\alpha-2)}$$

Internamente alla sfera, il campo è nullo e il potenziale rimane costante

$$V(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{\epsilon_0(\alpha-2)} \qquad\qquad (r < r_0)$$

Nel centro di simmetria si ha quindi

$$V(0) = \frac{\rho_0 r_0^2}{\epsilon_0(\alpha-2)} = 15\,\mathrm{V}$$

d)
La forza sul dipolo vale

$$F = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$

Considerata la simmetria sferica e la direzione del momento di dipolo, si ha

$$F_r = -p\frac{dE_r}{dr}$$

utilizzando il campo ricavato si ha

$$F_r = -\frac{\rho_0 p}{\epsilon_0(\alpha-3)}\frac{d}{dr}\left[r_0^3 r^{-2} - r_0^\alpha r^{1-\alpha}\right] = \frac{\rho_0 p}{\epsilon_0(\alpha-3)}\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - (\alpha-1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha\right]$$

che nel punto $r = r_i$ vale

$$F_r(r_i) = \frac{\rho_0 p}{\epsilon_0(\alpha-3)}\left[2\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^3 - (\alpha-1)\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^\alpha\right] = 1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{N}$$

e)
L'energia del dipolo vale

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Quindi, considerando che campo e dipolo sono anti-paralleli, l'energia cinetica del dipolo all'infinito è pari a

$$K = U = pE(r_i) = \frac{\rho_0 p}{\epsilon_0(\alpha-3)}\left[\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 r_0 - \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^\alpha r_i\right] = 6.9 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}$$

Soluzione 2-a

a)

Chiamiamo la $\lambda = Q/l$ la carica per unità di lunghezza delle superfici cilindriche. Dal teorema di Gauss il vettore spostamento elettrico è:

$$2\,\pi\, r\, l\, D = \lambda\, l \qquad D = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{1}{r}$$

Il campo $E_0(r)$ tra R_1 e R_2 è:

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

tra R_2 e R_3:

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha r^2}\,\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha}\,\frac{1}{r^3}$$

La differenza di potenziale tra le superfici conduttrici:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\,dr\; + \int_{R_2}^{R_3}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha}\,\frac{1}{r^3}\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left\{\log\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2}\right]\right\}$$

permette di ricavare λ da inserire nelle formule del campo elettrico:

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0\,\Delta V}{\left\{\log\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2}\right]\right\}}$$

Si può scrivere facilmente la capacità del condensatore:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\, l}{\left\{\log\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2}\right]\right\}}$$

b)

Non c'è polarizzazione per $R_1 < r < R_2$, solo per $R_2 < r < R_3$. In quest'ultimo caso il vettore intensità di polarizzazione è:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\,\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\alpha\, r^2 - 1}{\alpha\, r^3}$$

$$\sigma_P(R_2) = \vec{P}\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\alpha\, R_2^2-1}{\alpha\, R_2^3} = -1.68\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$Q_{PS}(R_2) = -\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\alpha\, R_2^2-1}{\alpha\, R_2^3}\, 2\pi\, R_2\, l = -\lambda\, l\, \frac{\alpha\, R_2^2-1}{\alpha\, R_2^2} = -\lambda\, l\left(1-\frac{1}{\alpha\, R_2^2}\right) = -2.64\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

$$\sigma_P(R_3) = \vec{P}\cdot(\hat{r}) = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\alpha\, R_3^2-1}{\alpha\, R_3^3} = 1.48\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$Q_{PS}(R_3) = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\alpha\, R_3^2-1}{\alpha\, R_3^3}\, 2\pi\, R_3\, l = \lambda\, l\, \frac{\alpha\, R_3^2-1}{\alpha\, R_3^2} = \lambda\, l\left(1-\frac{1}{\alpha\, R_3^2}\right) = 3.71\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

$$\rho_P(r) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\, P_r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\alpha\, r^2-1}{\alpha\, r^2}\right)$$

$$\rho_P(r) = -\frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(1-\frac{1}{\alpha\, r^2}\right) = -\frac{\lambda}{\pi\,\alpha}\frac{1}{r^4}$$

$$Q_{PV} = \int_{R_2}^{R_3}\rho_P(r)\, 2\pi r\, l\, dr = -\frac{2\,\lambda\, l}{\alpha}\int_{R_2}^{R_3}\frac{1}{r^3}\, dr$$

$$Q_{PV} = \frac{\lambda\, l}{\alpha}\left[\frac{1}{R_3^2}-\frac{1}{R_2^2}\right] dr = -1.07\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

Si verifica facilmente che la carica totale di polarizzazione è nulla:

$$Q_{PS}(R_2)+Q_{PS}(R_3)+Q_{PV} = 0$$

c)

L'energia elettrostatica del sistema è:

$$U = \frac{1}{2}C\,(\Delta V)^2 = \frac{\pi\epsilon_0\, l\,(\Delta V)^2}{\left\{\log\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_3^2}\right]\right\}}$$

la forza complessiva normale alla superficie a R_1 è:

$$F = \frac{dU}{dr}|_{V\ cost} = \frac{\pi\epsilon_0\, l\,(\Delta V)^2}{\left\{\log\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_3^2}\right]\right\}^2}\frac{1}{R_1}$$

la forza per unità di superficie (pressione) verso l'esterno (a r crescente):

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\,(\Delta V)^2}{\left\{\log\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_3^2}\right]\right\}^2}\frac{1}{R_1^2} = 1.23\cdot 10^{-2}\ \mathrm{N/m^2}$$

oppure lo stesso risultato da:

$$p = u = \frac{1}{2}\epsilon_0\, E_0^2$$

calcolata in R_1 e aggiungendo da considerazioni di elettrostaticache si tratta di una pressione verso l'esterno. Usando la formula della forza si trova esplicitamente la direzione della forza per unità di superficie.

d)

l lavoro L_{est} della forza esterna per estrarre il dielettrico è uguale e contrario al lavoro L_{el} della forza elettrostatica che tende a risucchiare un dielettrico. Quest'ultimo uguale alla variazione di energia elettrostatica e a metà del lavoro del generatore:

$$L_{est} = -L_{el} = -(U_{fin}-U_{in}) = -\left(\frac{1}{2}C_0\,(\Delta V)^2-\frac{1}{2}C\,(\Delta V)^2\right)$$

con:

$$C_0 = \frac{2\,\pi\,\epsilon_0\, l}{\log\frac{R_3}{R_1}}$$

$$L_{est} = \pi\,\epsilon_0\,l\left(\frac{1}{\left\{\log\dfrac{R_2}{R_1}+\dfrac{1}{2\alpha}\left[\dfrac{1}{R_2^2}-\dfrac{1}{R_3^2}\right]\right\}}-\frac{1}{\log\dfrac{R_3}{R_1}}\right)(\Delta V)^2 = 7.8\cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

Soluzione 2-b

a)
Chiamiamo la $\lambda = Q/l$ la carica per unità di lunghezza delle superfici cilindriche. Dal teorema di Gauss il vettore spostamento elettrico è:

$$2\,\pi\,r\,l\,D = \lambda\,l \qquad D = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{1}{r}$$

Il campo $E_0(r)$ tra R_1 e R_2 è:

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha r^2}\,\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha}\,\frac{1}{r^3}$$

e tra R_2 e R_3:

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

La differenza di potenziale tra le superfici conduttrici:

$$V = \int_{R_2}^{R_3}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\,dr\ + \int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha}\,\frac{1}{r^3}\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left\{\log\frac{R_3}{R_2}+\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right]\right\}$$

permette di ricavare λ da inserire nelle formule del campo elettrico:

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0\,V}{\left\{\log\dfrac{R_3}{R_2}+\dfrac{1}{2\alpha}\left[\dfrac{1}{R_1^2}-\dfrac{1}{R_2^2}\right]\right\}}$$

Si può scrivere facilmente la capacità del condensatore:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\,l}{\left\{\log\dfrac{R_3}{R_2}+\dfrac{1}{2\alpha}\left[\dfrac{1}{R_1^2}-\dfrac{1}{R_2^2}\right]\right\}}$$

b)
Non c'è polarizzazione per $R_2 < r < R_3$, solo per $R_1 < r < R_2$. In quest'ultimo caso il vettore intensità di polarizzazione è:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r-1)\,\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\alpha\,r^2-1}{\alpha\,r^3}$$

$$\sigma_P(R_1) = \vec{P}\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\alpha\,R_1^2-1}{\alpha\,R_1^3} = -2.02\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$Q_{PS}(R_1) = -\frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\alpha\,R_1^2-1}{\alpha\,R_1^3}\,2\pi\,R_1\,l = -\lambda\,l\,\frac{\alpha\,R_1^2-1}{\alpha\,R_1^2} = -\lambda\,l\left(1-\frac{1}{\alpha\,R_1^2}\right) = -1.91\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

$$\sigma_P(R_2) = \vec{P}\cdot(\hat{r}) = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\alpha\,R_2^2-1}{\alpha\,R_2^3} = 2.19\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$Q_{PS}(R_2) = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\alpha\,R_2^2-1}{\alpha\,R_2^3}\,2\pi\,R_2\,l = \lambda\,l\,\frac{\alpha\,R_2^2-1}{\alpha\,R_2^2} = \lambda\,l\left(1-\frac{1}{\alpha\,R_2^2}\right) = 3.44\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

$$\rho_P(r) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,P_r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\alpha\,r^2-1}{\alpha\,r^2}\right)$$

$$\rho_P(r) = -\frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(1-\frac{1}{\alpha\,r^2}\right) = -\frac{\lambda}{\pi\,\alpha}\,\frac{1}{r^4}$$

$$Q_{PV} = \int_{R_1}^{R_2}\rho_P(r)\,2\pi r\,l\,dr = -\frac{2\,\lambda\,l}{\alpha}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^3}\,dr$$

$$Q_{PV} = \frac{\lambda\, l}{\alpha}\left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right] dr = -1.53 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

Si verifica facilmente che la carica totale di polarizzazione è nulla:

$$Q_{PS}(R_1) + Q_{PS}(R_2) + Q_{PV} = 0$$

c)
L'energia elettrostatica del sistema è:

$$U = \frac{1}{2} C\, V^2 = \frac{\pi \epsilon_0\, l\, V^2}{\left\{\log\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right]\right\}}$$

la forza complessiva normale alla superficie a R_1 è:

$$F = \frac{dU}{dr}|_{V\ cost} = -\frac{\pi \epsilon_0\, l\, V^2}{\left\{\log\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right]\right\}^2}\frac{1}{R_3}$$

la forza per unità di superficie (pressione) verso l'interno (a r decrescente):

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\, V^2}{\left\{\log\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right]\right\}^2}\frac{1}{R_3^2} = 1.65 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N/m^2}$$

oppure lo stesso risultato da:

$$p = u = \frac{1}{2}\epsilon_0\, E_0^2$$

calcolata in R_3 e aggiungendo da considerazioni di elettrostatica che si tratta di una pressione verso l'interno. Usando la formula della forza si trova esplicitamente la direzione della forza per unità di superficie.

d)
Per mantenere costante il potenziale V mentre si estrae il dielettrico, il generatore deve far variare la carica da Q_{in} a Q_{fin}.
Il lavoro è:

$$L_{gen} = (Q_{fin} - Q_{in})\, V = (C_0 - C)\, V^2 < 0$$

con:

$$C_0 = \frac{2\,\pi\,\epsilon_0\, l}{\log\frac{R_3}{R_1}}$$

$$L_{gen} = 2\,\pi\,\epsilon_0\, l\left(\frac{1}{\log\frac{R_3}{R_1}} - \frac{1}{\left\{\log\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right]\right\}}\right) V^2 = -7.29 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}$$