Prova di Esonero di Elettromagnetismo - 11.06.2021

(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Un toroide ferromagnetico (con $\mu_r = 200$ costante e da considerarsi indipendente da H) ha una sezione quadrata di raggio $a = 2.0\,\mathrm{cm}$ e raggio interno $b = 10\,\mathrm{cm}$ come in figura. Su di esso sono avvolte due bobine. Nella prima con $N_1 = 200$ spire viene fatta passare una corrente costante $I = 5\,\mathrm{A}$, mentre la seconda, con $N_2 = 10$ spire e una resistenza $R = 10\,\Omega$, è chiusa su se stessa.

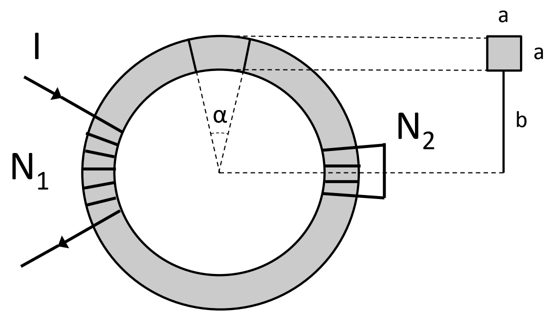
a) Si determinino i campi H e B in funzione della distanza radiale r dall'asse del toroide dandone i valori per $r = b + a/2$.

Successivamente una sezione corrispondente a un angolo $\alpha = 0.1$ radianti viene estratta lentamente dal toroide (in modo da evitare effetti di autoinduzione). In questa nuova configurazione si determini:

b) i campi H e B (nel materiale ferromegnetico) e H_0 e B_0 (nel traferro) in funzione di r, assumendo che la geometria delle linee di forza rimanga invariata, calcolandone i valori numerici per $r = b + a/2$;

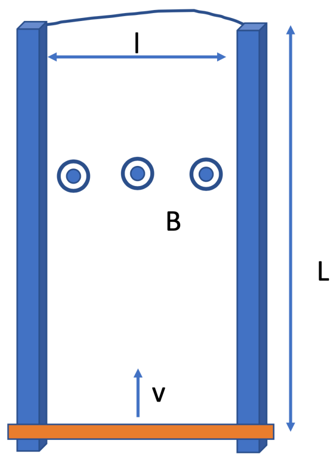
c) il rapporto tra l'energia magnetica finale e iniziale, calcolandone il valore numerico;

d) la carica totale passata nella seconda bobina a seguito dell'estrazione, calcolandone il valore numeirco.



Esercizio 2

Due barre conduttrici di resistività $\rho = 2.0 \times 10^{-4}\,\Omega\mathrm{m}$ e sezione $A = 0.50\,\mathrm{cm}^2$, alte entrambe $L = 1.0\,\mathrm{m}$ sono poste parallele in verticale a distanza $l = 25\,\mathrm{cm}$ come in figura. Le due barre sono collegate all'estremità superiore a mezzo di un filo conduttore di resistenza trascurabile. Nella regione è presente un campo di induzione magnetica uniforme ortogonale al circuito, di verso uscente dal foglio e di modulo $B = 0.50\,\mathrm{T}$. Un'asta conduttrice di resistenza trascurabile e massa $m = 1.0\,\mathrm{g}$ viene posta a contatto con le due barre come in figura inizialmente in corrispondenza dell'estremità inferiore delle due barre. Da un certo istante l'asta prende a muoversi verso l'alto con una velocità costante e pari a $v = 2.0\,\mathrm{m/s}$.



Si determini:

a) il valore della corrente che percorre il circuito in funzione della posizione x dell'asta e il valore numerico della corrente quando l'asta si trova a metà salita, specificando il verso di percorrenza della corrente (ovvero se la corrente scorre in figura in senso orario o antiorario);

b) la forza esterna necessaria per mantenere l'asta in moto a velocità costante, in funzione della posizione x dell'asta stessa;

c) la quota alla quale la forza peso eguaglia la forza magnetica;

d) il lavoro complessivamente fatto dalla forza esterna per portare l'asta fino a metà altezza;

e) il valore dell'energia dissipata nel circuito nel tempo in cui l'asta si porta dalla posizione iniziale fino a metà altezza, discutendo il bilancio energetico del processo.

Soluzione 1

a)
Per la geometria del toroide, è ragionevole assumere che le line di forza di H siano delle circonferenze con asse lo stesso asse del toroide. Dal teorema della circuitazione possiamo scrivere:

$$2\pi r\, H = N_1\, I \qquad H = \frac{N_1 I}{2\pi\, r} \qquad B = \frac{\mu\, N_1 I}{2\pi\, r}$$

$$H(b+\frac{a}{2}) = 1447 \text{ As/m} \qquad B(b+\frac{a}{2}) = 0.36 \text{ T}$$

b)
Dopo che è stata rimossa la sezione del toroide, nell'approssimazione di α piccolo, applichiamo il teorema della circuitazione assumendo che le linee di forza siano ancora delle circonferenze:

$$H\,(2\pi-\alpha)\, r + H_0\, \alpha\, r = N_1 I$$

e osservando:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0} \qquad H = \frac{B}{\mu}$$

si ottiene:

$$B = B_0 = \frac{\mu_0 \mu_r\, N_1\, I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\,\frac{1}{r}$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{\mu_r\, N_1\, I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\,\frac{1}{r} \qquad H = \frac{B_0}{\mu} = \frac{N_1\, I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\,\frac{1}{r}$$

$$B\left(b+\frac{a}{2}\right) = 0.087 \text{ T} \qquad H\left(b+\frac{a}{2}\right) = 347 \text{ As/m} \qquad H_0\left(b+\frac{a}{2}\right) = 69441 \text{ As/m}$$

c)
La densità di energia magnetica inizialmente è:

$$u_m^{(i)}(r) = \frac{1}{2}\,\mu\, H^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mu\, N_1^2\, I^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{r^2}$$

e integrando su tutto il volume del toroide:

$$U_m^{(i)} = \int_b^{b+a}\int_0^{2\pi} u_m^{(i)}(r)\,\frac{1}{r^2}\, a\, dr\, r d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\mu N_1^2\, I^2}{2\pi}\, a \log\frac{b+a}{b}$$

Dopo l'estrazione della sezione le densità di energia all'interno del materiale ferromagnetico e nel traferro sono:

$$u_{m-int}^{(f)}(r) = \frac{1}{2}\,\mu\,\left(\frac{N_1\, I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\right)^2\,\frac{1}{r^2}$$

$$u_{m-tra}^{(f)}(r) = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\left(\frac{\mu_r\, N_1\, I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\right)^2\,\frac{1}{r^2}$$

e le corrispondenti energie sono:

$$U_{m-int}^{(f)}(r) = \int_b^{b+a}\int_0^{2\pi-\alpha} u_{m-int}^{(i)}\,\frac{1}{r^2}\, a\, dr\, r d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mu\,\left(\frac{N_1\, I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\right)^2\, a\,(2\pi-\alpha)\,\log\frac{b+a}{b}$$

$$U_{m-tra}^{(f)}(r) = \int_b^{b+a}\int_0^{\alpha} u_{m-tra}^{(i)}\,\frac{1}{r^2}\, a\, dr\, r d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mu_0\,\left(\frac{\mu_r\, N_1\, I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\right)^2\, a\,\alpha\,\log\frac{b+a}{b}$$

Che sommate danno:

$$U_m^{(f)} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0\,\mu_r\,a\,N_1^2\,I^2}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\,\log\frac{b+a}{b}$$

Alle stesse espressioni dell'energia magnetica $U_m^{(i)}$ e $U_m^{(f)}$ si può pervenire dalle espressioni dei flussi di B nel toroide (Φ/N_2 calcolati nel punto d) usando la formula per l'energia:

$$U_m = \frac{1}{2}\Phi\,N_1\,I$$

dove N_1 è il numero di volte che il flusso di B è concatenato con la corrente I nel primo circuito.
Il rapporto tra energia magnetica finale e iniziale è:

$$\frac{U_m^{(f)}}{U_m^{(i)}} = \frac{2\pi}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha} = 0.24$$

d)
Possiamo usare la legge di Felici. Dobbiamo calcolare i flussi del campo B concatenati con la seconda bobina prima e dopo l'estrazione della sezione di toroide.
Il flusso di B iniziale e finali concatenati con la seconda bobina sono:

$$\Phi_2^{(i)}(B) = \frac{\mu_0\mu_r\,N_2\,N_1 I}{2\pi}\int_b^{b+a}\frac{1}{r}\,a\,dr = \frac{\mu_0\mu_r\,N_2\,N_1 I}{2\pi}\,a\,\log\frac{b+a}{b}$$

$$\Phi_2^{(f)}(B) = \frac{\mu_0\mu_r\,N_2\,N_1\,I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\int_b^{b+a}\frac{1}{r}\,a\,dr = \frac{\mu_0\mu_r\,N_2\,N_1\,I}{(2\pi-\alpha)+\mu_r\alpha}\,a\,\log\frac{b+a}{b}$$

Ne segue:

$$Q = \frac{\Phi_2^{(i)}(B)-\Phi_2^{(f)}(B)}{R} = \frac{\mu_0\mu_r\,N_2\,N_1 I\;a}{R}\,\log\frac{b+a}{b}\,\frac{\alpha\,(\mu_r-1)}{2\pi\,[2\pi+\alpha(\mu_r-1)]} = 1.11\times10^{-4}\ \mathrm{C}$$

Soluzione 2

a) Definiamo un asse x verticale avente origine nella posizione iniziale dell'asta e rivolto verso l'alto. Nel corso della salita il sistema è equivalente ad un circuito con una forza elettromotrice indotta e due resistenze in serie date dalle parti delle barri situate aldisopra dell'asta in moto. L'equazione del circuito sarà data quindi da:

$$-\frac{d\phi}{dt} = RI$$

La corrente circola in verso anti-orario. Riscriviamo l'equazione esplicitando sia la derivata del flusso che l'espressione della resistenza.

$$-\frac{d}{dt}\left(l(L-x)B\right) = lvB = 2\frac{\rho(L-x)}{A}I(x)$$

di cui ricaviamo la corrente in funzione di x:

$$I(x) = \frac{lvBA}{2\rho}\frac{1}{L-x}$$

La corrente cresce man mano che l'asta sale, tendendo a divergere quando $x\to L$ perché in tale limite la resistenza risulta annullarsi. A metá salita, $x = L/2$ si ha:

$$I(L/2) = \frac{lvBA}{L\rho} = 0.062\,\mathrm{A}$$

b) La risultante delle forze che agiscono sull'asta deve essere nulla. Oltre alla forza esterna F_{est}, agiscono sull'asta la forza peso $-mg$ rivolta verso il basso e la forza magnetica F_M il cui verso dipende dal verso di percorrenza della corrente. In questo caso, la corrente circola in verso anti-orario (nella vista della figura) e pertanto la forza magnetica F_M è rivolta verso il basso opponendosi al moto. Quindi la forza esterna deve opporsi a due forze concordi di diversa intensità.
Deve essere dunque:

$$F_{est}(x) + F_M(x) - mg = 0$$

Calcoliamo la forza magnetica:

$$F_M(x) = -BlI(x) = -\frac{l^2B^2vA}{2\rho(L-x)}$$

per cui la forza esterna è data da:

$$F_{est}(x) = mg + \frac{l^2 B^2 v A}{2\rho(L-x)}$$

c) La forza peso e la forza magnetica sono uguali quando sono uguali i loro moduli:

$$mg = \frac{l^2 B^2 v A}{2\rho(L-x)}$$

che avviene per:

$$x^* = L - \frac{l^2 B^2 v A}{2mg\rho} = 60\,\mathrm{cm}$$

La corrente tende ad aumentare avvicinandosi alla parte superiore delle barre, data la sempre minore resistenza del circuito.
d) Calcoliamo il lavoro della forza esterna fino a metá altezza integrando:

$$L_{est} = \int_0^{L/2} F_{est}(x)dx = \int_0^{L/2} \left(mg + \frac{l^2 B^2 v A}{2\rho(L-x)} \right) dx = mg\frac{L}{2} + \frac{l^2 B^2 v A}{2\rho} \ln 2 = 7.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

e) Il lavoro della forza esterna si presenta come la somma della variazione dell'energia potenziale ΔU_g della forza peso e di un secondo termine che deve essere necessariamente l'energia δE_{diss} dissipata per effetto Joule sulle resistenze.

$$\Delta U_g = mg\frac{L}{2}$$

$$\delta E_{diss} = \int_0^{L/2} R(x) I^2(x) \frac{dx}{v} = \int_0^{L/2} \frac{2\rho(L-x)}{A} \frac{l^2 v^2 B^2 A^2}{4\rho^2} \frac{1}{(L-x)^2} \frac{dx}{v} = \frac{l^2 B^2 v A}{2\rho} \ln 2 = 2.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

L'equazione che descrive il bilancio energetico prende la forma:

$$L_{est} = \Delta U_g + \delta E_{diss}$$

Inserendo i valori numerici sopra calcolati, il bilancio risulta essere ben rispettato. In conclusione tutto il lavoro speso dalla forza esterna si traduce in aumento di energia potenziale e in dissipazione per effetto Joule.