Corso di Elettromagnetismo

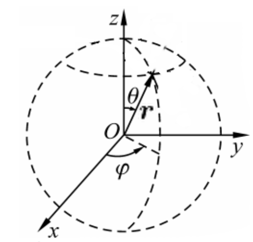
Prova scritta / recupero esoneri: a.a. 2014/15, 23 Giugno 2015

Proff. S. Giagu, F. Lacava, D. Trevese

- intero scritto: risolvere i problemi 1, 2 e 3: tempo a disposizione 3.5h;
- recupero del primo, secondo, terzo esonero: risolvere rispettivamente il problema 1, 2 o 3: tempo a disposizione 1.5h;

Problema 1

Su un piccolo guscio sferico di raggio $R = 1$ cm e di spessore trascurabile è depositata una carica con densità superficiale $\sigma(\theta, \phi) = \alpha \cos\theta$, dove $\alpha = 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$ è una costante e (r, θ, ϕ) sono coordinate sferiche come mostrato in figura.

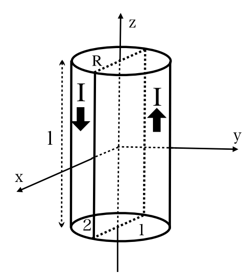


Determinare:
a) la carica di ciascun segno depositata sul guscio;
b) calcolare modulo, direzione e verso del momento di dipolo della distribuzione;
c) quanto vale la carica di un dipolo elementare avente lo stesso momento di dipolo calcolato sopra e distanza tra le cariche $\delta = R$;
d) il campo elettrico generato dalla distribuzione nel centro del guscio e nel punto di coordinate cartesiane $(x, y, z) = (0, 0, d)$ con $d = 10$ m;
[solo per il recupero del 1^o esonero:]
e) la pressione elettrostatica nei due punti indicati nella domanda d).

Problema 2

Due superfici conduttrici semicilindriche sono poste in modo da formare un cilindro di raggio $R = 10\,\mathrm{cm}$ e di lunghezza $\ell = 98.7\mathrm{m}$ ($\ell \gg R$), e sono separate nel piano $y = 0$ da un isolante di spessore trascurabile come in figura. I due conduttori sono percorsi da una corrente $I = 3\,\mathrm{A}$, uniformemente distribuita, che scorre rispettivamente verso l'alto e verso il basso.

a) Calcolare il campo di induzione magnetica generato sull'asse del cilindro.
b) Confrontare il modulo del campo calcolato al punto precedente con quello generato in un solenoide di lunghezza e raggio uguali a quelli del cilindro. Quante spire deve avere il solenoide affichè il modulo del campo di induzione magnetica sia uguale nei due casi?
c) Una spira circolare di raggio $r = 1$ mm, attraversata da una corrente $i = 0.1\,\mathrm{A}$, è posta lungo l'asse del cilindro ed è libera di ruotare attorno al suo centro. Determinare l'orientazione di equilibrio della spira e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad essa. Per la spira si assuma un momento di inerzia pari a $I_s = 3\,\mathrm{g\,mm^2}$.



Problema 3

Una stazione radio emette un'onda monocromatica, di frequenza $\nu = 3.0$ MHz, polarizzata linearmente.
Un osservatore posto a grande distanza riceve un'onda da considerarsi piana, con intensità media di radiazione $I = 20\mu\mathrm{W\,m^{-2}}$.
a) Scrivere un'espressione del campo elettrico, assumendo l'asse x nella direzione (e verso) di propagazione, l'asse y nella direzione del campo elettrico ed esplicitare i valori numerici delle costanti che compaiono nell'espressione;
b) scrivere la forma analitica del potenziale vettore relativo ai campi dell'onda e calcolarne l'ampiezza.
L'osservatore dispone di una spira quadrata di lato $a = 20\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 2\,\Omega$.
c) Spiegare come deve essere orientata la normale alla spira perché sia massima la forza elettromotrice indotta dall'onda.
d) Nelle condizioni del punto precedente, e tenendo conto che il lato a della spira è molto minore della lunghezza d'onda λ della radiazione, calcolare la f.e.m. indotta, $f = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$, e la potenza media dissipata nella spira.
[solo per il recupero del 3^o esonero:]
e) Tenendo conto che $a \ll \lambda$, calcolare la f.e.m. indotta $f_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$, verificando la consistenza col risultato del punto d).

Soluzioni

Problema 1

a)

Considerando che $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$, la carica totale è nulla

$$Q_T = \int_{\text{guscio}} dS\sigma = 2\pi R^2 \alpha \int_0^\pi d\theta \sin\theta\cos\theta = 0\,, \tag{1}$$

come si poteva concludere dalla simmetria della densità di carica superficiale. La carica è distribuita simmetricamente sulle due calotte, ciascuna di carica (in modulo) pari a

$$Q = 2\pi R^2 \alpha \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta = \pi R^2 \alpha \approx 3.14 \times 10^{-10}\text{C}\,. \tag{2}$$

b)

Considerando che in coordinate polari il vettore posizione di un elementino di guscio sferico è $\vec{r} = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, per il momento di dipolo otteniamo

$$\begin{aligned} p_x &= R^2 \int_0^\pi d\theta R \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \alpha \cos\theta \sin\theta \cos\phi = 0\,, & (3)\\ p_y &= R^2 \int_0^\pi d\theta R \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \alpha \cos\theta \sin\theta \sin\phi = 0\,, & (4)\\ p_z &= R^2 \int_0^\pi d\theta R \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \alpha \cos\theta \cos\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \alpha \approx 4.19 \times 10^{-12}\text{C m}\,. & (5) \end{aligned}$$

c)

Dal momento che il modulo del dipolo elementare è $p = Q\delta$ dove δ è la distanza fra le cariche opposte $(Q, -Q)$ che formano il dipolo, otteniamo $Q = p/R = \frac{4}{3}\pi R^2 \alpha \approx 4.19 \times 10^{-10}$C.

d)

Per simmetria il campo elettrico nel centro è diretto lungo z verso il basso. Il campo elettrico nel centro del guscio si può calcolare a partire dalla definizione per il campo elettrico generato da una distribuzione superficiale di carica:

$$\begin{aligned} E_z(r=0) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta R^2 \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sigma\cos\theta}{R^2} & (6)\\ &= -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \approx -3.77 \times 10^4 \text{V/m}\,, & (7) \end{aligned}$$

dove il fattore $\cos\theta$ tiene conto della componente z del campo.

Il campo elettrico nel punto $P = (0, 0, d)$ può essere calcolato in approssimazione di dipolo a partire dal potenziale

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{\alpha R^3}{3\epsilon_0 z^2}\,. \tag{8}$$

Per simmetria il campo elettrico è nuovamente parallelo all'asse z e quindi la sua unica componente non nulla è

$$E_z = -\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_P = \frac{2\alpha R^3}{3\epsilon_0 z^3}\,. \tag{9}$$

Nel punto $P = (0, 0, d)$ il campo vale $E_z \approx 7.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{V/m}$.

e)
Per definire la pressione del campo elettrico nei punti in esame si può far riferimento a una piccola lamina conduttrice di spessore trascurabile posta nei punti considerati e avente come normale l'asse z. Sulle facce della lamina si ha induzione elettrica completa ma, per una lamina di superficie ridotta, se lo spessore è trascurabile ($<< R$) il campo non viene alterato. La pressione su ciascuna faccia della lamina è pari alla densità di energia, $p = u$ in prossimità del conduttore.
Un approccio più rigoroso richiede di considerare il tensore degli sforzi di Maxwell (non trattato nel corso). In tal caso si può definire il tensore degli sforzi in termini dei campi elettrico e magnetico (nullo in questo caso). Su una superficie, come la lamina prima posizionata, lo sforzo normale coincide con la pressione calcolata in precedenza. Modificando l'orientazione della superficie cambiano le componenti del tensore degli sforzi interessate e non si può quindi a rigore parlare di una pressione scalare come nel caso di un fluido.
Assumendo di poter definire la pressione elettrostatica p, nel senso prima precisato, questa è pari alla densità di energia, $p = u$. Usando i risultati del punto precedente, risulta

$$p = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{\alpha^2}{18\epsilon_0} \approx 6.27 \times 10^{-3}\mathrm{J/m^3} \tag{10}$$

$$p = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{2}{9}\frac{\alpha^2}{\epsilon_0}\left(\frac{R}{d}\right)^6 \approx 2.5 \times 10^{-20}\mathrm{J/m^3} \tag{11}$$

al centro del guscio e nel punto $P = (0, 0, d)$, rispettivamente.

Problema 2

a)
Ciascun nastro può essere considerato come un insieme di fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita percorsi da una corrente $dI = I d\theta/\pi$. Il modulo del campo di induzione magnetica generato da un singolo filo sarà $dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{R}$. Per la simmetria del problema, il campo magnetico del semicilindro 1 è diretto verso le x positive e il contributo del semicilindro 2 è identico. Pertanto $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ con

$$B_x = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\pi R}\sin\theta = \frac{2\mu_0 I}{\pi^2 R} \approx 0.076\,\mathrm{Gauss}\,, \tag{12}$$

dove il fattore $2 \times 2 = 4$ tiene conto dei contributi uguali dei due nastri e del contributo uguale della sezione $-\pi/2 < \theta < 0$.

b)
Il campo di induzione magnetica sull'asse del solenoide è diretto lungo z e in modulo vale $B_s = n\mu_0 I$, dove n è la densità lineare di spire. Il numero di spire tale che $B_s = B_x$ è quindi

$$N = \frac{\ell}{\pi^2 R} \approx 100\,. \tag{13}$$

c) Il momento di dipolo magnetico della spira è $\vec{m} = i\pi r^2 \hat{n} \approx 3.14 \times 10^{-7}\,\mathrm{A\,m^2}\hat{n}$, dove $\hat{n}$ è il versore normale al piano della spira. Detto θ l'angolo fra $\vec{m}$ e $\vec{B}$, il momento delle forze e l'energia elettrostatica risultano

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{14}$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \tag{15}$$

Pertanto la spira tende a posizionarsi in modo che il suo momento sia parallelo e concorde in verso a $\vec{B}$, ossia il piano della spira nella posizione di equilibrio è $x = 0$. Per quanto riguarda la frequenza delle piccole oscillazioni, dalla seconda equazione cardinale della dinamica $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ (con $\vec{L} = I_s\vec{\omega}$ il momento angolare della spira e $\omega = \dot{\theta}$) otteniamo

$$I_s\ddot{\theta}(t) = -mB_x\sin\theta\,, \tag{16}$$

che, per piccoli θ, si riduce all'equazione di un oscillatore armonico di frequenza

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}r\sqrt{\frac{iI\mu_0}{I_s R}} \approx 4.6\,\mathrm{mHz} \tag{17}$$

Problema 3

a) L'onda si propaga lungo x ed è polarizzata lungo y, per cui il campo elettrico è

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y}\,, \tag{18}$$

dove $c \approx 3 \times 10^8$ m/s è la velocità della luce nel vuoto,

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} \approx 0.063\,\mathrm{m}^{-1}\,, \quad \lambda = c/\nu \approx 100\,\mathrm{m}\,, \quad E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} \approx 0.12\,\mathrm{V/m} \tag{19}$$

dove si è usato il fatto che il modulo del vettore di Poynting nel vuoto è $I = c\epsilon_0 E^2/2$. Il campo di induzione magnetica risulta $\vec{B} = |\vec{E}|/c\hat{z}$.

b) La radiazione è un'onda piana che si propaga lungo x, e quindi il potenziale vettore può dipendere solo da x e t: $\vec{A} = \vec{A}(x,t)$. Ponendosi nella gauge di radiazione pura (di Coulomb) in cui il potenziale scalare $V \equiv 0$ (assenza di cariche) e integrando poi la relazione $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, essendo noto il campo elettrico $\vec{E}(x,t) = E_y(x,t)\hat{y}$, si trova:

$$\vec{A}(x,t) = \frac{E_0}{\omega}\hat{y}\ sen(kx - \omega t)$$

Allo stesso risultato si arriva dalla relazione $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ alla quale corrispondono le equazioni scalari:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \tag{20}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = A_z(t) \quad \text{uniforme} \tag{21}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} = B_0 \cos(kx - \omega t) \tag{22}$$

dove $B_0 = E_0/c$. La componente $A_z(t)$ non dipende dalla posizione.
La relazione del potenziale $\vec{A}$ con il campo elettrico, essendo il potenziale scalare V nullo in assenza di cariche, è:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad .$$

Essendo $E_z = 0$ si ricava $A_z = cost$ e quindi si può porre $A_z = 0$.
Ricaviamo dunque dalla (22) che $\vec{A} = A(x,t)\hat{y}$ con

$$A(x,t) = \frac{B_0}{k}\sin(kx - \omega t) = \frac{E_0}{\omega}\sin(kx - \omega t)\,, \tag{23}$$

L'ampiezza del potenziale vettore è:

$$A_0 = \frac{B_0}{k} = \frac{E_0}{2\pi\nu} \approx 6.5 \times 10^{-9}\,\mathrm{Tesla\,m}\,. \tag{24}$$

c) La forza elettromotrice indotta è data dalla legge di Faraday-Neumann, $f_i = -\frac{d\phi}{dt}$, dove $\phi = \int dS\vec{B}\cdot\vec{n}$, con $\vec{n}$ vettore normale alla spira di aerea $S = a^2$. Pertanto, f_i è massima quando $\vec{n}$ è parallelo a $\vec{B}$, ossia quando la spira giace sul piano $z = 0$.

d) Assumiamo che la spira sia disposta fra $x = 0$ e $x = a$ sul piano $z = 0$ come da punto precedente. Usando la legge di Faraday-Neumann otteniamo,

$$f_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int dS\vec{B}\cdot\vec{n} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(B_0\cos(kx - \omega t)a^2\right) = B_0 kca^2 \sin(\omega t) = E_0 ka^2 \sin(\omega t)\,, \tag{25}$$

dove si è assunto il campo $\vec{B}$ uniforme in x fra $x = 0$ e $x = a \ll \lambda$. La potenza media dissipata dalla spira in un periodo $T = 2\pi/\omega$ è

$$\langle W\rangle = \langle f_i i\rangle = \frac{E_0^2 k^2 a^4}{R}\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{E_0^2 k^2 a^4}{2R} \approx 2.4 \times 10^{-8}\,\mathrm{Watt} \tag{26}$$

e) Usando invece la definizione $f_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ otteniamo

$$f_i = a[-E_0 \cos(ka - \omega t) + E_0 \cos(-\omega t)] \tag{27}$$

dove si è usato il fatto che i tratti orizzontali (lungo x) della spira sono ortogonali a $\vec{E}$ e non contribuiscono alla circuitazione, mentre i tratti verticali a $x = a$ e $x = 0$ hanno segno opposto. Sviluppando per $a \ll \lambda$ otteniamo

$$f_i = E_0 k a^2 \sin(\omega t)\,, \tag{28}$$

che equivale al risultato in Eq. (25), come ci si aspettava.