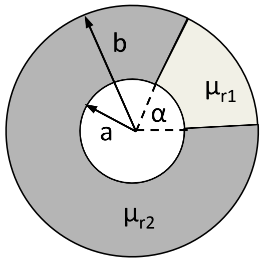
Compito scritto di Elettromagnetismo e di recupero degli esoneri
Proff. S. Giagu, F. Lacava, S. Rahatlou, a.a. 2015/16, 4 Luglio 2016

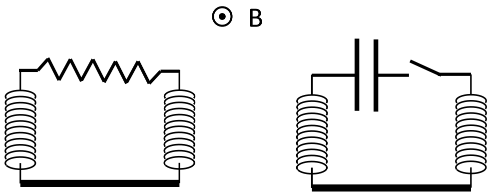
- recupero prima prova di esonero: problema 1 con domanda d); tempo a disposizione 1.5h;
- recupero seconda prova di esonero: problema 3 con domande c) e d); tempo a disposizione 1.5h;
- compito scritto: problemi 1, 2 e 3; tempo massimo a disposizione 4h;

Problema 1
Tre conduttori sferici concentrici hanno raggi $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm. Sul conduttore più interno viene posta una carica $Q = 1$ nC. Si calcoli:
a) il potenziale del conduttore più interno e la d.d.p. tra i due più esterni.
Lo spazio tra i due conduttori più esterni viene riempito con un liquido con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3.5$. Si determini:
b) il potenziale del conduttore più interno e la d.d.p. tra i due conduttori più esterni,
c) la variazione di energia elettrostatica per effetto dell'inserimento del liquido dielettrico.
Solo per il recupero dell'esonero 1 si risolva anche il seguente quesito:
d) le densità di carica di polarizzazione presenti nel dielettrico,

Problema 2
Due superfici cilindriche di lunghezza praticamente infinita e con raggi $a = 1$ cm e $b = 3$ cm, hanno come asse comune l'asse z. Su di esse, parallelamente all'asse del sistema e distribuite uniformemente sulle due superfici, scorrono due correnti uguali I = 62 A con direzioni opposte. Quella interna nella direzione positiva dell'asse z. Tra le due superfici, per un angolo $\alpha = \pi/2$ intorno all'asse è posto un materiale con permeabilità magnetica relativa $\mu_{r1} = 10$ e per un angolo $(2\pi - \alpha)$ un materiale di permeabilità magnetica relativa $\mu_{r2} = 100$ come mostrato in figura. Assumendo che le linee di forza del campo magnetico siano delle circonferenze intorno all'asse z, si determinino:
a) le espressioni del campo magnetico nei due mezzi tra le superfici cilindriche;
b) le espressioni delle intensità di magnetizzazione;
c) i valori delle correnti di magnetizzazione presenti sulle superfici interne ed esterne dei due mezzi.



Problema 3
Un circuito elettrico è composto da una sbarretta di lunghezza $l = 0.2$ m e di resistenza R=10 Ω . La sbarretta è mantenuta ferma ed è collegata da due molle conduttrici uguali, di costate elastica $k = 0.1$ N/m, a un'asticella conduttrice, anch'essa di lunghezza l e di massa $m = 20$ g, parallela alla sbarretta resistiva (si veda la figura). Un campo B =1 T è perpendicolare al piano orizzontale, privo di attrito, sul quale è posto il circuito. Al tempo $t = 0$ l'asticella è lasciata libera di muoversi da una posizione con le due molle allungate di un tratto $A =$ 3 cm.
a) Si scriva l'equazione del moto dell'asticella conduttrice,
b) si risolva l'equazione calcolando i valori dei parametri che caratterizzano il moto.
Solo per il recupero dell'esonero 2 si risolva anche la seguente parte:
Si sostituisca alla sbarretta resistiva una sbarretta con un condensatore di capacità $C = 10$ nF con depositata una carica $Q_0 = 100$ nC, che all'istante iniziale viene connesso alle molle nella posizione di riposo. In questa nuova configurazione:
c) si scriva e si risolva l'equazione del moto dell'asticella calcolando i valori dei parametri che caratterizzano il moto,
d) si determini come varia nel tempo la carica sul condensatore.



Soluzione Problema 1

a) Solo sul conduttore più interno è depositata una carica quindi il campo elettrico in tutto lo spazio esterno si può trovare dal teorema di Gauss:

$$4\pi r^2 D = Q \qquad\qquad E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

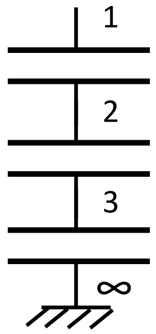
Il potenziale del conduttore più interno è:

$$V(r_1) = \int_{\infty}^{r_1} E_0(r)dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_1} = 449\ V$$

La d.d.p. tra i conduttori 2 e 3 si trova allo stesso modo:

$$V_2 - V_3 = \int_{r_3}^{r_2} E_0(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = 45\ V$$

Il sistema di conduttori si può vedere come una serie di tre condensatori sferici (vedi figura) di capacità:



$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right) \qquad C_{23} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2}\right) \qquad C_{3\infty} = 4\pi\epsilon_0 r_3$$

con capacità complessiva C_{tot} data da:

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_{3\infty}} = 4\pi\epsilon_0 r_1$$

Ne segue che il potenziale del conduttore più interno è:

$$V_1 = \frac{Q}{C_{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_1}$$

e la d.d.p. tra 2 e 3 è:

$$V'_{23} = \frac{Q}{C_{23}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$

b) Nel caso in cui si inserisca il dielettrico tra i due gusci esterni il campo tra di essi diventa:

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}$$

e la d.d.p. tra 2 e 3 risulta:

$$V'_{23} = \int_{r_3}^{r_2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{V_2 - V_3}{\epsilon_r} = 12.8\ V$$

mentre il potenziale del conduttore più interno è:

$$V(r_1) = \int_{r_2}^{r_1} E_0(r)dr + \int_{r_3}^{r_2} E(r)dr = + \int_{\infty}^{r_3} E_0(r)dr = 416.8\ V$$

Altrimenti si può dire che la capacità tra i conduttori 2 e 3 diventa:

$$C'_{23} = 4\pi\epsilon\left(\frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2}\right)$$

e quella della serie di condensatori C'_{tot}:

$$\frac{1}{C'_{tot}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C'_{23}} + \frac{1}{C_{3\infty}}$$

Ne segue:

$$V' = \frac{Q}{C'_{tot}} \qquad V'_{23} = \frac{Q}{C'_{23}}$$

c)La variazione di energia immagazzinata si può calcolare direttamente facendo la differenza degli integrali sullo spazio della densità di energia elettrostatica nei due casi o più semplicemente dalla differenza di energia elettrostatica nelle serie di condensatori:

$$U' - U = \frac{Q}{C'_{tot}} - \frac{Q}{C_{tot}} = -16\ nJ$$

d) Dal campo tra i conduttori 2 e 3 si trova l'intensità di polarizzazione:

$$P(r) = \chi\epsilon_0 E(r)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \qquad P = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\ .$$

La densità di carica di volume è nulla poiché il dielettrico è omogeneo come risulta anche da:

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P(r))}{\partial r} = 0\ .$$

Le densità di cariche superficiali valgono invece

$$\sigma_p(r_2) = \vec{P}(r_2)\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r_2^2} = -3,8\ 10^{-8}\ C/m^2$$

e

$$\sigma_p(r_3) = \vec{P}(r_3)\cdot\hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r_3^2} = 2.3\ 10^{-8}\ C/m^2\ .$$

Soluzione Problema 2

a) Applicando il teorema della circuitazione di Ampère (in un sistema di coordinate cilindriche (r,φ,z))

$$H_1 r\alpha + H_2 r(2\pi - \alpha) = I \qquad \text{con } H_1 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_{r1}}\ ,\ H_2 = \frac{B_2}{\mu_0\mu_{r2}}$$

e poiché per le condizioni di continuità sulla superficie interna di separazione dei due mezzi: $B_1 = B_2 = B$, si trova:

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{r} \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} (\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))$$

e dalle precedenti:

$$H_1 = \frac{I}{r} \frac{\mu_{r2}}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))} \qquad H_2 = \frac{I}{r} \frac{\mu_{r1}}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))}$$

tutti diretti lungo la direzione $\hat{\varphi}$.
b) Le intensità di magnetizzazione nei due mezzi valgono

$$M_1 = \chi_1 H_1 = \frac{I}{r} \frac{\mu_{r2}(\mu_{r1} - 1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))} \qquad M_2 = \chi_2 H_2 = \frac{I}{r} \frac{\mu_{r1}(\mu_{r2} - 1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))}$$

sempre diretto come $\hat{\varphi}$.
c) Le densità di correnti amperiane sulle superfici interne ed esterne sono

$$\vec{j}_s = \vec{M} \times \vec{n}$$

e valgono sulla superficie interna ed esterna

$$\vec{j}_{s1,2}(a) = M_{1,2}(r = a)\hat{z} \qquad \vec{j}_{s1,2}(b) = -M_{1,2}(r = b)\hat{z}$$

quindi le correnti totali, fissato $\alpha = \pi/2$ valgono

$$I_1(a) = a\alpha j_{s1}(a) = I\alpha \frac{\mu_{r2}(\mu_{r1} - 1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))} = 429\ A$$

$$I_2(a) = a(\pi - \alpha) j_{s2}(a) = I(2\pi - \alpha) \frac{\mu_{r1}(\mu_{r2} - 1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))} = 1416\ A$$

sulla superficie piu' interna, e le stesse cambiate di segno su quella esterna.

Soluzione 3
a) Sull'asticella mobile agisce la forza elastica delle due molle. Questa, ponendo l'asse x nella direzione in cui si allungano le molle, con l'origine nella loro posizione di riposo, si può scrivere come:

$$F_{el} = -2kx\ ;$$

Lo spostamento dell'asticella provoca una variazione del flusso di B concatenato col circuito producendo una f.e.m. data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz ed una corrente ad essa associata:

$$f.e.m. = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} \qquad i = \frac{f.e.m.}{R}$$

L'asticella percorsa dalla corrente i è soggetta a una forza:

$$F = ilB = -\frac{B^2 l^2}{R} \frac{dx}{dt}$$

quindi l'equazione differenziale del moto dell'asticella risulta:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx - \frac{B^2l^2}{R}\frac{dx}{dt} \qquad\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{mR}\frac{dx}{dt} + \frac{2k}{m}x = 0 \ .$$

Si riconosce l'equazione di un moto con un termine di attrito dovuto alla resistenza.
b) La soluzione dell'equazione differenziale trovata si ottiene considerando il polinomio caratteristico associato:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad a_1 = \frac{B^2l^2}{mR} \qquad a_0 = \frac{2k}{m}$$

che, per i valori numerici dati, ha due zeri complessi coniugati $\lambda_\pm = -\alpha \pm i\beta$ con

$$\alpha = \frac{a_1}{2} = \frac{B^2l^2}{2mR} = 0.1\ s^{-1} \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k}{m} - \frac{B^4l^4}{m^2R^2}} = 3.16\ rad/s.$$

corrispondenti a una costante di smorzamento:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = 10\ s$$

e a uno pseudoperiodo T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.99\ s \qquad .$$

La soluzione sarà del tipo:

$$x(y) = e^{-\alpha t}\left(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\right)$$

ove, imponendo $x(0) = A$ e $v(0) = 0$ si ricava

$$c_1 = A\ ,\ c_2 = A\frac{\alpha}{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = Ae^{-\alpha t}\left(\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right) \ .$$

c) Nel caso si ponga un condensatore con carica iniziale Q_0 e le molle nella posizione di riposo, il condensatore inizia a scaricarsi e la corrente passando nell'asticella genera una forza di Lorentz:

$$F_L = Bil$$

mentre nel circuito in movimento è indotta una *fem*:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt}$$

L'equazione del circuito è:

$$fem + \frac{Q}{C} = 0 \qquad .$$

Derivando e osservando che $i = -dQ/dt$ si ottiene:

$$\frac{i(t)}{C} = -Bl\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{i(t)}{CBl} \ .$$

L'equazione meccanica per il moto dell'asticella è:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx + F_L \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x + \frac{Bl}{m}i(t)$$

e sostituendo nell'ultima espressione l'espressione di $i(t)$ in funzione dell'accelerazione trovata prima si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x - \frac{Bl}{m}CBl\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x - \frac{CB^2l^2}{m}\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}\left(1 + \frac{CB^2l^2}{m}\right) = -\frac{2k}{m}x$$

riscrivibile come il moto di un oscillatore armonico

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{(m + CB^2l^2)}x = 0$$

con soluzione:

$$x(t) = D\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{(m + CB^2l^2)}} = 3.16\ rad/s$$

sulla quale vanno poste le condizioni iniziali

$$x(0) = D\sin(\phi) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = 0$$

$$\frac{Q_0}{C} + fem(t = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Q_0}{C} = BlA\omega \quad \rightarrow \quad A = \frac{Q_0}{BlC\omega} = 15.8\ m$$

La legge oraria del moto è quindi:

$$x(t) = \frac{Q_0}{CBl\omega}\sin(\omega t)$$

d) La corrispondente espressione della carica del condensatore si ricava dall'equazione del circuito:

$$\frac{Q(t)}{C} = -fem \quad \rightarrow \quad Q(t) = CBl\frac{dx(t)}{dt} = CBl\frac{Q_0}{CBl\omega}\omega\cos(\omega t) = Q_0\cos(\omega t)\ .$$