Compito scritto di Elettromagnetismo

Proff. S. Giagu, F. Lacava, S. Rahatlou, a.a. 2015/16, 2 Settembre 2016

- tempo massimo a disposizione 4h

Problema 1

Su una sfera isolante cava di raggi interno $R_1 = 3$ cm ed esterno $R_2 = 6$ cm è distribuita carica elettrica con densità $\rho(\theta) = \rho_0 \cos\theta$ essendo θ l'angolo con l'asse di simmetria z della sfera. La carica totale positiva $Q_+ = -Q_-$ è pari a 100 μC.
Si calcoli:
a) il momento di dipolo della distribuzione;
b) l'espressione del potenziale elettrico a grande distanza dal centro della calotta;
c) il campo elettrico nel punto $P(0, 0, 60\ cm)$.

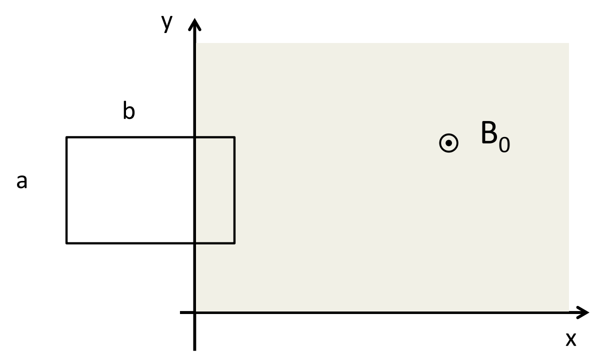
Problema 2

Un solenoide superconduttore (di resistenza nulla) cilindrico, di altezza $h = 10$ m e di raggio $r = 2.5$ cm, è costruito con $n = 1000$ spire per metro. Il campo B nel solenoide può essere considerato con ottima approssimazione quello di un solenoide infinito. Il solenoide viene acceso con una corrente $i = \alpha t$, con $\alpha = 12$ A/s, fino a raggiungere la corrente di 120 A. All'interno del solenoide è posta una piccola spira quadrata di lato $l = 1.3$ cm e di resistenza $R = 0.004\ \Omega$, giacente in un piano ortogonale all'asse del solenoide.
Determinare:
a) la f.e.m. del generatore necessaria a fornire la corrente i al solenoide;
b) l'energia totale fornita dal generatore;
c) la corrente indotta nella spira durante l'accensione del solenoide;
d) la carica totale che ha circolato nella spira durante il processo.

NB: L'effetto della piccola spira è trascurabile per i punti (a) e (b).

Problema 3

Una spira rettangolare rigida di lati $a = 20$ cm e $b = 50$ cm, di massa $m = 10$ g e resistenza $R = 20\ \Omega$, orientata come in figura, entra nel semispazio $x > 0$ con velocità $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ con $v_0 = 0.5$ m/s dove è presente un campo B uniforme di componenti $(0, 0, B_0 = 1\ T)$. Trascurando l'autoinduzione, si determini:
a) come varia nel tempo la sua velocità;
b) la velocità finale della spira;
c) l'espressione dell'energia dissipata per effetto Joule nella spira confrontandola con la variazione di energia cinetica.



Soluzione Problema 1

a)

Da considerazioni di simmetria, e notando che la densità di carica è negativa per z negative e positiva per z positive, si conclude che il momento di dipolo della distribuzione è orientato nella direzione e nel verso dell'asse z. L'unica componente non nulla è quindi:

$$p_z = 2\pi\rho_0 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} r^3 \cos^2\theta \sin\theta \; dr d\theta = \frac{\pi}{3}\rho_0 \left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

In cui il valore della costante ρ_0 può essere calcolato integrando la densità di carica su uno dei due emisferi e uguagliando il modulo del risultato a Q_+. Scegliendo di integrare sull'emisfero superiore, si ha:

$$2\pi\rho_0 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\theta \sin\theta \; dr d\theta = \frac{\pi}{3}\rho_0 \left(R_2^3 - R_1^3\right) = Q_+$$

da cui si ricava

$$\rho_0 = \frac{3Q_+}{\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)} = 5.05 \cdot 10^{-1} \; C/m^3$$

Si ottiene quindi per p_z il valore

$$p_z = 6.43 \cdot 10^{-6} \; C \; m$$

b)

A distanze dal centro grandi rispetto al raggio esterno della sfera si può ricorrere all'espressione del potenziale in approssimazione di dipolo. Si ottiene quindi

$$V\left(\vec{r}\right) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{z p_z}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

c)

Il punto (0,0,60 cm) giace sull'asse z, che è anche l'asse secondo cui è orientato il momento di dipolo del sistema. Per considerazioni di simmetria, lungo tale asse il campo può avere diversa da zero la sola componente lungo z, che è calcolabile in approssimazione di dipolo poiché il punto richiesto si trova a distanza molto maggiore del raggio R_2 della sfera. Si ha quindi

$$\vec{E}(0,0,60\; cm) = E_z(0,0,60\; cm)\hat{z}$$

In cui E_z vale

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{p_z}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(60\; cm)^3} = 5.35 \cdot 10^5 \; V/m$$

Soluzione Problema 2

a)

La variazione della corrente dá origine a una f.e.m. autoindotta nel solenoide che viene compensata dalla f.e.m. del generatore. La f.e.m. f si può calcolare con la legge di Faraday:

$$f = L\frac{di}{dt} = L\alpha \tag{1}$$

dove L è l'induttanza del solenoide data da

$$L = \mu_0 n^2 \pi r^2 h \tag{2}$$

Numericamente: $f = 3.0 \times 10^{-1}$ V.

b)

L'energia fornita dal generatore è pari all'energia magnetica accumulata nel solenoide (nessuna dissipazione essendo nulla la resistenza) quando circola la corrente $i_f = 120$ A.

$$E_{gen} = \frac{1}{2}Li_f^2 = 1.8 \times 10^2\,\mathrm{J}. \tag{3}$$

Lo stesso risultato si ottiene se si integra la potenza $P_{gen} = f \cdot i(t) = L\alpha \cdot \alpha t = L\alpha^2 t$ erogata dal generatore

$$E_{gen} = \int_0^{t_f} P_{gen} dt = \int_0^{t_f} L\alpha^2 t\, dt = \frac{1}{2}L\alpha^2 t^2 = \frac{1}{2}L{i_f}^2 \tag{4}$$

c)

Il campo magnetico generato dal solenoide è costante sulla superficie della spira e il coefficiente di mutua induzione è data da

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 n i l^2}{i} = \mu_0 n l^2 = 2.1 \times 10^{-7}\,\mathrm{H}. \tag{5}$$

Avremo quindi:

$$I_i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}M\frac{di}{dt} = -\frac{M\alpha}{R} = -\frac{\mu_0 n l^2 \alpha}{R} = 0.63\,\mathrm{m}A. \tag{6}$$

d)

La carica totale è data dalla legge di Felici:

$$Q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R} = \frac{\mu_0 n l^2 i_f}{R} = 6.3\,\mathrm{m}C. \tag{7}$$

Soluzione Problema 3

a)

Quando la spira è entrata di un tratto x nel capo magnetico, il flusso magnetico concatenato è: $\Phi(x) = axB$ e nella spira è presente una f.e.m. f che fa circolare una corrente:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{aB}{R}\frac{dx}{dt} = -\frac{aBv}{R}$$

Sul tratto verticale del circuito dentro il campo agisce quindi una forza:

$$F = iaB = -\frac{a^2B^2}{R}v$$

e l'equazione del moto della spira risulta:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{a^2B^2}{R}v$$

che integrata per separazione di variabili dà la velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{a^2B^2}{mR}t} = v_0 e^{-\alpha t} \qquad \alpha = \frac{a^2B^2}{mR}$$

Quando il secondo lato verticale entra nel campo B il flusso concatenato rimane costante e la f.e.m. e la corrente si annullano. Come conseguenza nessuna forza agisce sul circuito e la sua velocità rimane costante.

b)

La forza si annulla quando la spira è entrata interamente nel campo B, cioé per un tratto $x = b$. Integrando $\frac{dx}{dt} = v(t)$ si trova che ciò si verifica all'istante t^* pari a:

$$t^* = -\frac{1}{\alpha}\log\left[1 - \frac{b\alpha}{v_0}\right]$$

quando la velocità è:

$$v(t^*) = v_0\left(1 - \frac{b\alpha}{v_0}\right) = v_0 - \frac{ba^2B^2}{mR} = 0.4\ m/s$$

che rimane successivamente costante.

c)

L'energia dissipata per effetto Joule è:

$$U = \int_0^{t^*} i^2 R dt = \int_0^{t^*}\left(\frac{aBv}{R}\right)^2 R dt = \int_0^{t^*}\left(\frac{a^2B^2v_0^2}{R}\right)e^{-2\alpha t}dt$$

$$U = \left(\frac{a^2B^2v_0^2}{R}\right)\frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t^*}\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - e^{-2\alpha t^*}\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left[2\frac{b\alpha}{v_0} - \left(\frac{b\alpha}{v_0}\right)^2\right]$$

La diminuzione di energia cinetica è:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv(t^*)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1 - e^{-2\alpha t^*}\right] = 0.45\ mJ$$

pari all'energia dissipata nella spira resistiva trovata sopra. Questa diminuzione può anche confrontarsi con l'energia cinetica iniziale pari a 1.25 mJ.