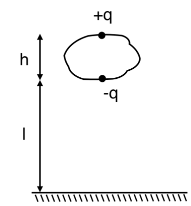
Compito scritto di Elettromagnetismo del 3 Novembre 2016

Docenti: S.Giagu, F.Lacava

Risolvere i tre problemi: tempo a disposizione 4 ore.

Problema 1

Una nuvola sorvola il suolo terrestre ad un'altezza $l = 3\,\mathrm{km}$, e si estende verso l'alto per un'altezza $h = 1\,\mathrm{km}$ (vedi figura). Il campo elettrico $\mathbf{E}$ tra nuvola e suolo terrestre è diretto verticalmente è ha intensità calcolata al livello del suolo $E_0 = 100\,\mathrm{V/m}$. Assumendo che la nuvola sia elettricamente neutra ma schematizzabile come una carica puntiforme $+q$ posta nello strato superiore e una carica $-q$ posta in quello inferiore, e che la superficie terrestre sia schematizzabile come un piano conduttore indefinito tenuto a potenziale nullo, determinare:



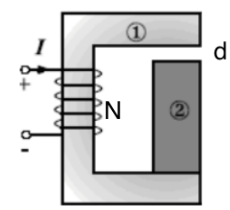
a) il valore della carica elettrica q;

b) la forza elettrica esterna (in modulo, direzione e verso) esercitata dal suolo terrestre sulla nuvola;

c) la carica totale indotta sulla superficie terrestre dalla nuvola.

Problema 2

Un circuito magnetico è costituito da due nuclei ferromagnetici (1 e 2 in figura) di sezione $S = 10\,\mathrm{cm}^2$, permeabilità magnetica costante $\mu_{r_1} = 100$ e $\mu_{r_2} = 200$ e lunghezza $l_1 = 50\,\mathrm{cm}$ e $l_2 = 10\,\mathrm{cm}$ rispettivamente, e da un traferro in aria di spessore $d = 5\,\mathrm{cm}$. Il circuito è alimentato da un solenoide avvolto intorno al nucleo 1, costituito da $N = 1000$ spire percorse dalla corrente costante $I = 100\,\mathrm{A}$. Determinare:



a) il valore del campo di induzione magnatica presente nel traferro;

b) la forza con cui si attraggono le espansioni polari dell'elettromagnete;

c) la variazione di energia magnetica del sistema qualora si rimpiazzi il traferro con del materiale ferromagnetico di permeabilità magnetica μ_{r_2}.

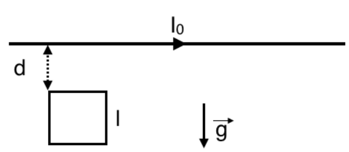
Problema 3

Un filo rettilineo conduttore posto in orizzontale (vedi figura) è percorso dalla corrente costante I_0 fornita da un generatore ideale di corrente. Una spira conduttrice quadrata di lato l, massa m, e resistenza elettrica r viene tenuta sospesa a distanza d dal filo soggetta alla forza peso. Ad un dato istante la spira viene lasciata libera di cadere. Determinare:

a) l'espressione del coefficiente di mutua induzione tra spira e filo;

b) l'equazione del moto della spira;

c) il tempo t, a partire da quando la spira è lasciata libera di cadere, per il quale l'accelerazione è massima ed il valore dell'accelerazione a tale istante.



Soluzione Problema 1

a)

Il problema può essere risolto con il metodo delle cariche immagine, ponendo due cariche immagine, speculari rispetto alle due cariche $+q$ e $-q$ che schematizzano la distribuzione nella nuvola, simmetricamente rispetto al suolo terrestre (NOTA: date le distanze in gioco non è possibile utilizzare l'approssimazione di dipolo per schematizzare le distribuzioni di carica). Il campo elettrico sulla superficie del suolo dovuto alla nuvola e al suolo, sarà quello generato sul suolo dalle cariche della nuvola e da quelle immagine. Avremo quindi (prendendo come direzione positiva dell'asse verticale quella diretta verso l'alto):

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2q}{l^2} - \frac{2q}{(l+h)^2}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{h^2+2hl}{l^2(l+h)^2} \Longrightarrow$$

$$q = \frac{2\pi\epsilon_0 E_0 l^2 (l+h)^2}{h(h+2l)} = 0.11\,\mathrm{C}.$$

b)

La forza che agisce sulla nuovola è pari alla forza esercitata dalle cariche immagine sulle cariche della nuvola. Avremo:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{(2l)^2} + \frac{2}{(2l+h)^2} - \frac{1}{(2l+2h)^2}\right) = -0.28\,\mathrm{N}$$

diretta dalla nuvola verso il suolo.

c)

Poichè la carica elettrica globale della nuvola è nulla, e nuvola e suolo terrestre sono in configurazione di induzione completa sarà nulla anche la carica totale indotta sul suolo terrestre.

Soluzione Problema 2

a)
Applicando la legge di Hopkinson: $NI = \Re BS$, dove la riluttanza $\Re$ del circuito magnetico è:

$$\Re = \frac{l_1}{\mu_{r_1}\mu_o S} + \frac{l_2}{\mu_{r_2}\mu_o S} + \frac{d}{\mu_o S} = \frac{l_1\mu_{r_2} + l_2\mu_{r_1} + d\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{\mu_0\mu_{r_1}\mu_{r_2}S}$$

segue:

$$B = B_0 = \frac{NI\mu_0\mu_{r_1}\mu_{r_2}}{l_1\mu_{r_2} + l_2\mu_{r_1} + d\mu_{r_1}\mu_{r_2}} = 2.3\,\mathrm{T}$$

b)
Trascurando il flusso disperso, l'energia magnetica del circuito è:

$$U_m = l_1 S \cdot \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu_{r_1}} + l_2 S \cdot \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu_{r_2}} + dS \cdot \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{N^2I^2\mu_0\mu_{r_1}\mu_{r_2}S}{2(l_1\mu_{r_2} + l_2\mu_{r_1} + d\mu_{r_1}\mu_{r_2})}$$

e la forza magnetica attrattiva tra le espansioni polari è:

$$F_m = \frac{dU_m}{dd}|_{I=cost} = -\frac{N^2I^2\mu_0\mu_{r_1}\mu_{r_2}S}{2(l_1\mu_{r_2} + l_2\mu_{r_1} + d\mu_{r_1}\mu_{r_2})^2}\mu_{r_1}\mu_{r_2};$$

Per mantenere le espansioni polari distanziate a distanza d è necessario applicare quindi una forza opposta $F_{ext} = -F_m = -2039\,\mathrm{N}$.

c)
La variazione di energia magnetica U_m è:

$$\begin{aligned}
\Delta U_m = U_m^{\mu_{r_2}} - U_m^{aria} &= \frac{N^2I^2\mu_0\mu_{r_1}\mu_{r_2}S}{2}\frac{(d\mu_{r_1}\mu_{r_2} - d\mu_{r_1})}{(l_1\mu_{r_2} + l_2\mu_{r_1} + d\mu_{r_1}\mu_{r_2})(l_1\mu_{r_2} + (l_2+d)\mu_{r_1})} = \\
&= \frac{N^2I^2\mu_0\mu_{r_1}\mu_{r_2}S}{2}\frac{d\mu_{r_1}(\mu_{r_2} - 1)}{(l_1\mu_{r_2} + l_2\mu_{r_1} + d\mu_{r_1}\mu_{r_2})(l_1\mu_{r_2} + (l_2+d)\mu_{r_1})} = 0.98\,kJ
\end{aligned}$$

Soluzione Problema 3

a)
Il campo di induzione magnetica prodotto dal filo è dato dalla legge di Biot e Savart:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R}\hat{\phi};$$

avendo indicato con $\hat{\phi}$ il versore tangente alla circonferenza di raggio R centrata sul filo e diretto secondo la regola della mano destra. Il flusso attraverso la spira sarà dato da (avendo assunto la normale alla spira entrante dentro al piano della figura):

$$\Phi = MI_0 = \int_d^{d+l} \mathbf{B}\cdot\hat{n}dS = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} l dR = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} ln\frac{d+l}{d};$$

per cui:

$$M = \frac{\Phi}{I_0} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} ln\frac{d+l}{d};$$

b)
Trascurando l'autoinduzione della spira avremo per il circuito $f_i = ri$ in cui:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 l^2}{2\pi}\frac{1}{(y+l)y}\frac{dy}{dt};$$

e la corrente indotta:

$$i = -\frac{\mu_0 I_0 l^2}{2\pi r}\frac{1}{(y+l)y}\frac{dy}{dt};$$

Calcolando la forza di Lorentz che agisce su i lati della spira, i contributi dei lati verticali si cancellano essendo soggetti a forze uguali ed opposte, mentre per i lati orizzontali abbiamo:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_0 i l^2}{2\pi}\frac{1}{(y+l)y}\hat{y};$$

avendo preso l'asse y diretto nella direzione di moto della spira. L'equazione del moto sarà quindi:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu_0^2 I_0^2 l^4}{4\pi^2(y+l)^2y^2r}\frac{dy}{dt} + mg;$$

come atteso l'induzione magnetica produce una foza di tipo smorzamento viscoso.

c)
Poichè i due termini a secondo membro dell'equazione del moto hanno segno opposto, si avrà massima accelerazione nell'istante iniziale $t = 0$ per il quale $a = g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.