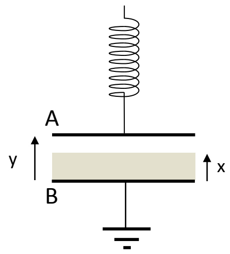
Compito scritto di Elettromagnetismo e di recupero degli esoneri.
10-2-2017.

Compito scritto: tempo massimo 4 ore.

Esercizio 1

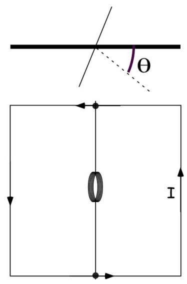
Un condensatore piano in aria, inizialmente scarico, ha armature circolari, di area S=0.25 m^2 e di peso trascurabile, disposte orizzontalmente come in figura a distanza y. L'armatura **B** in basso è fissa mentre quella in alto **A** ha il suo centro connesso a una molla di costante elastica $k = 1.5 \times 10^4\ N/m$ appesa a un perno fisso.



a) Si determini l'allungamento della molla se sull'armatura **A** viene depositata una carica $Q = 10\ \mu C$. Successivamente tra le armature viene immesso un liquido dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3.5$ fino a un'altezza x.
b) Si dimostri che la distanza tra le armature non dipende dall'altezza x del liquido immesso.
c) Si trovi poi come variano, rispetto alle condizioni di condensatore scarico, l'energia potenziale della molla e l'energia elettrostatica del condensatore nei casi esaminati in a) e b) con $y = 2.0\ cm$ e $x = 1.0\ cm$.

Esercizio 2

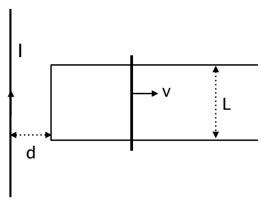
Una spira quadrata di lato $a = 10\ cm$ è percorsa da una corrente stazionaria I= 100 A. Nel suo centro è sospesa una piccola bobina circolare di N= 60 spire uguali di raggio r=5 mm, con l'asse delle spire parallelo a due lati della bobina quadrata. I fili isolanti che sospendono la bobina, esercitano un momento di torsione $M = -k\theta$, essendo θ l'angolo che l'asse della bobina forma con il piano della spira quadrata e $k = 1.5 \cdot 10^{-7}\ Nm/rad$.



Si immette nella bobina una corrente che viene aumentata molto lentamente fino al valore i_b . Nella nuova condizione d'equilibrio, l'asse si ferma ad un angolo $\theta = (\pi/12)\ rad$.
Si calcoli:
a) il campo B_0 al centro della spira quadrata;
b) l'espressione del momento magnetico m della piccola bobina;
c) il valore della corrente i_b e il valore di m .

Esercizio 3

Una bacchetta conduttrice di resistenza elettrica R e lunghezza L si può muovere senza attrito su due lunghi binari orizzontali collegati tra loro da un conduttore rigido parallelo alla bacchetta in modo da formare in tutto una spira rettangolare. I binari e il conduttore rigido hanno tutti resistenza elettrica trascurabile. Al tempo t = 0 la bacchetta si trova a contatto del conduttore rigido e viene posta in moto a velocità costante v. Un filo parallelo alla bacchetta e complanare con la spira è posto a distanza d dal conduttore rigido (vedere figura) ed è percorso dalla corrente continua I.



Calcolare:
a) l'espressione del flusso del campo di induzione magnetica **B** concatenato con la spira e della forza elettromotrice indotta;
b) l'espressione della forza che deve essere applicata alla bacchetta per mantenerla in moto con velocità costante;
c) l'espressione dell'energia dissipata dall'istante iniziale a quando la bacchetta ha percorso una distanza D.

Soluzione 1

a) L'energia elettrostatica del condensatore in aria è:

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{S\epsilon_0}y$$

La forza tra le armature è attrattiva:

$$F = -\frac{dU_0}{dy}|_{Q\ cost} = -\frac{Q^2}{2S\epsilon_0}$$

Sull'armatura superiore ferma all'equilibrio agiscono la forza elettrostatica e la forza di richiamo della molla:

$$-k\Delta y - \frac{Q^2}{2S\epsilon_0} = 0$$

$$\Delta y = y - y_0 = -\frac{Q^2}{2kS\epsilon_0} = -1.5\ mm$$

dove y_0 è la posizione dell'estremo libero della molla a riposo. La molla si allunga.

b) quando è immesso un liquido di altezza x, la capacità C_T diventa:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{x}{S\epsilon} + \frac{y-x}{S\epsilon_0}$$

L'energia:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2}\left[\frac{x}{S\epsilon} + \frac{y-x}{S\epsilon_0}\right]$$

e la forza elettrostatica non cambia:

$$F = -\frac{dU}{dy}|_{Q\ cost} = -\frac{Q^2}{2S\epsilon_0}$$

e quindi nemmeno l'estensione della molla e la distanza tra le armature del condensatore.

c) L'energia potenziale della molla diventa:

$$U_k = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = 17.0\ mJ$$

nei due casi. L'energia elettrostatica nel caso a) è:

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{S\epsilon_0}y = 452\ mJ$$

nel caso b):

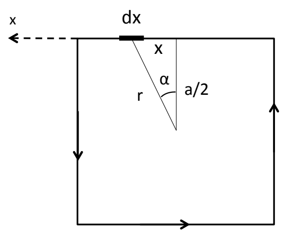
$$U = \frac{Q^2}{2S\epsilon_0}\left[\frac{x}{\epsilon_r} + (y-x)\right] = 290\ mJ$$

Soluzione 2

a) Il campo al centro della spira quadrata è la somma dei campi generati dai quattro lati. Usiamo la formula di Laplace:

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

Con riferimento alla figura si trova:



$$x = \frac{a}{2}\tan\alpha \qquad dx = \frac{a}{2}\,\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad r\cos\alpha = \frac{a}{2}$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\cos\alpha\ d\alpha$$

Integrando su un lato:

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos\alpha\ d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\sqrt{2}$$

e quindi il campo al centro è:

$$B_0 = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{a}2\sqrt{2} = 1.1\cdot 10^{-3}\ T$$

b) L'espressione del momento magnetico della piccola bobina è:

$$m = Ni_bS$$

c) All'equilibrio il momento meccanico sulla piccola bobina è nullo:

$$\vec{M}_{Tot} = \vec{m}\times\vec{B}_0 - k\theta\hat{\theta} = 0$$

Ne segue:

$$i_b = \frac{k\theta}{NISB_0} = 7.6\ mA \qquad m = 3.9\cdot 10^{-5}\ A\cdot m^2$$

Soluzione 3

a)

Il filo percorso dalla corrente I genera nello spazio in cui è immersa la spira un campo di induzione magnetica $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ con direzione ortogonale al piano della spira, verso entrante nella spira e intensità che diminuisce con la distanza r dal filo. Per definizione di flusso concatenato con la spira avremo:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = -\int_d^{x(t)} \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \frac{dx'}{x'} = -\frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln \frac{x(t)}{d} = -\frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln \frac{d+vt}{d};$$

avendo indicato con $x(t) = d + vt$ la distanza della barretta dal filo.

La forza elettromotrice indotta è quindi data da:

$$f_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \frac{v}{d+vt}.$$

b)

La potenza dissipata per effetto Joule sulla spira è data da:

$$P_J(t) = \frac{f_i^2}{R} = \left(\frac{\mu_0 ILv}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{1}{(d+vt)^2};$$

la potenza generata dalla forza esterna $P_f(t) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ deve controbilanciare la potenza dissipata, per cui:

$$f = \frac{P_f(t)}{v} = \frac{P_J(t)}{v} = \left(\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{1}{(d+vt)^2}.$$

c)

L'energia dissipata dopo che la bacchetta ha percorso la distanza D = 1 m è calcolabile integrando nel tempo la potenza dissipata per effetto Joule tra l'istante t = 0 e l'istante t = D/v:

$$E_d = \int_0^{D/v} P_J(t) dt = \int_0^{D/v} \left(\frac{\mu_0 ILv}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{1}{(d+vt)^2} dt = \left(\frac{\mu_0 ILv}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{D}{vd(d+D)}.$$