**Prova Scritta Elettromagnetismo - 28.6.2019**

*(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)*

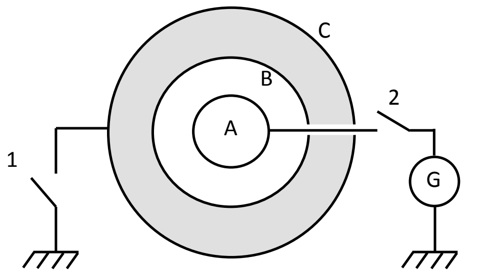
---

recupero primo esonero: risolvere l'esercizio 1: tempo massimo 1.5 ore.
recupero secondo esonero: risolvere l'esercizio 2: tempo massimo 1.5 ore.
intero scritto: risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

---

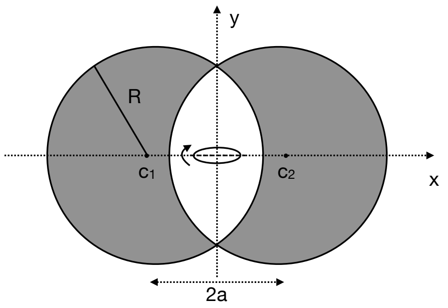
**Esercizio 1**

Tre gusci conduttori sferici concentrici A, B e C hanno raggi rispettivamente $r_A = 3$ cm, $r_B = 6$ cm e $r_C = 9$ cm. Tra i conduttori B e C è presente un dielettrico caratterizzato da una suscettività $\chi = (\alpha r^3 - 1)$ con $r$ distanza dal centro (in cm) e $\alpha = 0.01$ cm$^{-3}$. Sul conduttore B è inizialmente posta una carica $Q_0 = 2\,\mu$C dopodiché chiudendo l'interruttore 1, il conduttore C viene messo a massa.
Si determinino:
a) il potenziale $V_A$ del conduttore A;
b) le cariche di polarizzazione presenti.
Aperto poi l'interruttore 1, il conduttore A è connesso da un interruttore 2 a un generatore che immettendo in A una carica $Q_x$ ne innalza il potenziale a $V'_A = 2V_A$. Si determinino in questa nuova situazione:
c) le cariche presenti sui gusci A, B e C;
d) il lavoro fatto dal generatore.




**Esercizio 2**

Un sistema di conduttori ha sezione trasversale data dall'intersezione di due circonferenze di raggio $R = 1$ cm con centri separati da una distanza $2a = 0.8$ cm come mostrato in figura. La parte conduttrice è quella in colore grigio, mentre la regione di intersezione tra i due cerchi colorata in bianco è vuota. Il conduttore a sinistra è attraversato da una corrente $I = 2.0$ A uniforme perpendicolare al piano del foglio con verso uscente dalla pagina, quello di destra dalla medesima corrente ma in verso opposto. Considerando il conduttore come di lunghezza infinita lungo l'asse $z$, e costituito da materiale omogeneo ed isotropo con permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 1$, determinare:
a) il campo di induzione magnetica in tutti i punti della zona vuota di intersezione tra le due circonferenze, calcolando anche il valore numerico nell'origine del sistema di riferimento.
Se nell'origine del sistema di riferimento viene posta una spira conduttrice circolare di resistenza elettrica trascurabile e coefficiente di autoinduzione $L = 10.0\,\mu$H, mantenuta in rotazione a velocità angolare costante intorno al suo diametro passante per l'asse $x$, sapendo che la corrente massima che percorre la spira è pari a $i_{max} = 400$ nA, determinare:
b) il raggio della spira;
c) la potenza necessaria per mantenere la spira in rotazione a velocità angolare costante.



**Soluzione**
**Esercizio 1**
**a)** Nella prima configurazione la superficie A si trova all'interno della B quindi allo stesso potenziale della B.
- Per calcolare il potenziale $V_A$ possiamo trovare la capacità del condensatore sferico BC vedendolo come una serie di condensatori sferici di area $4\pi r^2$, distanza tra le armature $dr$ e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1 + \chi = \alpha r^3$, ognuno quindi con inverso di capacità:

$$d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{\epsilon_0\, \alpha r^3}\frac{dr}{4\pi r^2}$$

Integrando:

$$\frac{1}{C_{BC}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, \alpha}\int_{r_B}^{r_C}\frac{1}{r^5}\, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, \alpha}\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{r^4}\right]_{r_B}^{r_C} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0\, \alpha}\frac{r_C^4 - r_B^4}{r_C^4 r_B^4}$$

E quindi per il potenziale $V_A = V_B$ ($V_C = 0$):

$$V_A = V_B = \frac{Q_0}{16\pi\epsilon_0\, \alpha}\frac{r_C^4 - r_B^4}{r_C^4 r_B^4} = 27.8\,\mathrm{kV}$$

- In alternativa si può trovare il potenziale come integrale del campo elettrico. Il vettore induzione elettrica per $r_b < r < r_c$ si trova dal teorema di Gauss:

$$D = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_0}{r^2}$$

e quindi il campo elettrico e il potenziale $V_A$:

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \alpha}\frac{1}{r^5} =$$

$$V_A = V_B = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\alpha}\int_{r_B}^{r_C}\frac{1}{r^5}\, dr = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\, \alpha}\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{r^4}\right]_{r_B}^{r_C} = \frac{Q_0}{16\pi\epsilon_0\, \alpha}\frac{r_C^4 - r_B^4}{r_C^4 r_B^4}$$

**b)** Il vettore intensità di polarizzazione è:

$$P = \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 \chi \frac{D}{\epsilon} = \frac{\alpha r^3 - 1}{\alpha r^3}\frac{Q_0}{4\pi r^2} = \frac{\alpha r^3 - 1}{4\pi\alpha r^5} Q_0$$

La densità di carica di polarizzazione di volume è:

$$\rho_p = -div\, \vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(P_r r^2) = \frac{1}{r^2}\frac{Q_0}{4\pi}\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{1}{\alpha r^3}\right) = -\frac{3}{4\pi\alpha}\frac{Q_0}{r^6} < 0$$

Il suo integrale tra $r_B$ e $r_C$ è:

$$Q_{Pv} = \frac{Q_0}{\alpha}\left(\frac{1}{r_C^3} - \frac{1}{r_B^3}\right) = -0.65\,\mu\mathrm{C}\ < 0$$

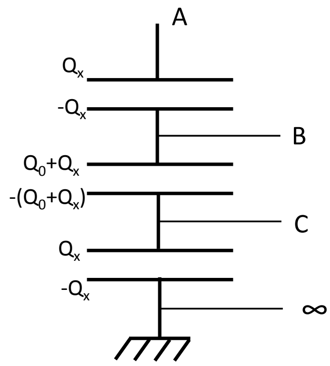


Figure 1: Schema per quesito 2c

La densità di carica superficiale a $r = r_B$ è:

$$\sigma_P(r_B) = -\hat{r}\cdot\vec{P} = -\frac{\alpha r_B^3 - 1}{4\pi\alpha r_B^5} Q_0 \qquad Q_P(r_B) = Q_0\left(-1 + \frac{1}{\alpha r_B^3}\right) = -1.07\,\mu\mathrm{C}$$

e a $r = r_C$:

$$\sigma_P(r_C) = \hat{r}\cdot\vec{P} = \frac{\alpha r_C^3 - 1}{4\pi\alpha r_C^5} Q_0 \qquad Q_P(r_C) = Q_0\left(1 - \frac{1}{\alpha r_C^3}\right) = 1.72\,\mu\mathrm{C}$$

e la somma delle cariche superficiali è:

$$Q_{Ps} = \frac{Q_0}{\alpha}\left(\frac{1}{r_B^3} - \frac{1}{r_C^3}\right) = 0.65\,\mu\mathrm{C}\ = -Q_{Pv} > 0$$

**c)** Il sistema è ora una serie di tre condensatori di capacità come schematizzato in figura 1:

$$C_{AB} = 4\pi\epsilon_0\frac{r_B r_A}{r_B - r_A} \qquad C_{BC} = 16\pi\alpha\epsilon_0\frac{r_C^4 r_B^4}{r_C^4 - r_B^4} \qquad C_{C\infty} = 4\pi\epsilon_0 r_C$$

con cariche:

$$Q_{AB} = Q_x \qquad Q_{BC} = Q_x + Q_0 \qquad Q_{C\infty} = Q_x$$

Il potenziale sull'armatura A diventa:

$$V'_A = \frac{Q_x}{C_{AB}} + \frac{Q_x + Q_0}{C_{BC}} + \frac{Q_x}{C_{C\infty}} = 2V_A = 2\frac{Q_x}{C_{BC}}$$

e quindi si trova:

$$Q_x = \frac{Q_0}{C_{BC}} \frac{1}{\frac{1}{C_{AB}} + \frac{1}{C_{BC}} + \frac{1}{C_{C\infty}}}$$

dalla quale si trovano le cariche sulle tre armature:

$$Q_A = Q_x = 0.11\,\mu\text{C} \qquad Q_B = Q_0 = 2.0\,\mu\text{C} \qquad Q_{C\infty} = Q_0 = -2.0\,\mu\text{C}$$

**d)** Il lavoro del generatore è pari alla variazione di energia elettrostatica:

$$L_{gen} = U_{fin} - U_{in} = \frac{1}{2}\frac{Q_x^2}{C_{AB}} + \frac{1}{2}\frac{(Q_x + Q_0)^2}{C_{BC}} + \frac{1}{2}\frac{Q_x^2}{C_{C\infty}} - \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_{BC}} = 4.41 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Alla stessa espressione si arriverebbe calcolando la variazione di energia elettrostatica dall'espressione della densità di energia.

**Esercizio 2**

a)
Applicando il principio di sovrapposizione il campo di induzione magnetica generato dal sistema di conduttori è esprimibile come la somma vettoriale dei campi di induzione magnetica generati da due conduttori cilindrici indefiniti percorsi dalla corrente $I$ in verso opposto. Questi ultimi possono essere calcolati nel punto $P = (x, y)$ all'interno dello spazio vuoto tra i conduttori usando il teorema della circuitazione di Ampere e sfruttando la simmetria cilindrica del problema come:

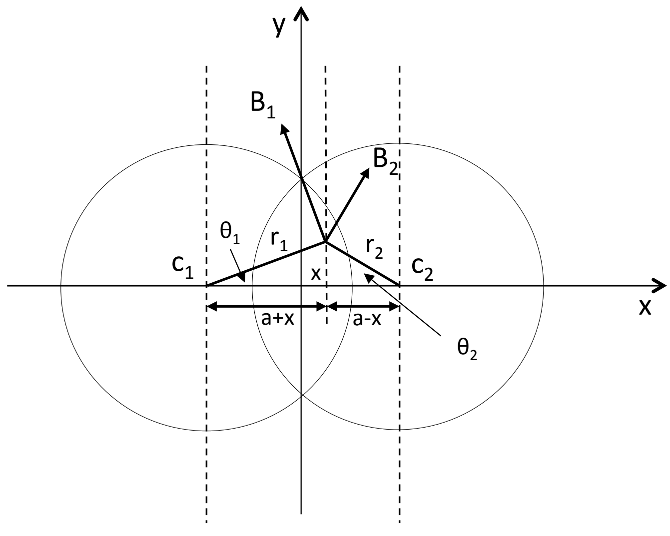
$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \mu_0 \tfrac{J}{2} r_1 \hat{t}_1 \\ \vec{B}_2 &= -\mu_0 \tfrac{J}{2} r_2 \hat{t}_2 \end{aligned}$$

avendo indicato con $J = I/\pi R^2$ la densità di corrente dei due fili, con $r_1$ e $r_2$ la distanza dal primo e secondo filo rispettivamente del punto in cui si vuole calcolare il campo di induzione magnetica, e con $\hat{t}_i$ i versori tangenti alla circonferenza centrata nel conduttore i-esimo di raggio $r_i$.

Proiettando lungo gli assi $x$ e $y$:

$$\begin{aligned} B_{1x} &= -B_1 \sin\theta_1 \\ B_{1y} &= B_1 \cos\theta_1 \\ B_{2x} &= B_2 \sin\theta_2 \\ B_{2y} &= B_2 \cos\theta_2 \end{aligned}$$

con $\theta_1$ l'angolo tra il vettore che congiunge $C_1$ e $P$ e l'asse $x$, e $\theta_2$ l'angolo tra il vettore che congiunge $C_2$ e $P$ e l'asse $x$.
Dalla geometria del problema si ottiene:




$$\begin{aligned} r_1 \cos\theta_1 &= a + x \\ r_2 \cos\theta_2 &= a - x \\ x = r_1 \sin\theta_1 &= r_2 \sin\theta_2; \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
B_x &= B_{1x} + B_{2x} = -\mu_0 \tfrac{J}{2} r_1 \sin\theta_1 + \mu_0 \tfrac{J}{2} r_2 \sin\theta_2 = -\tfrac{J}{2} r_1 \sin\theta_1 + \tfrac{J}{2} r_2 \tfrac{r_1}{r_2} \sin\theta_1 = 0 \\
B_y &= B_{1y} + B_{2y} = \mu_0 \tfrac{J}{2}(a+x) + \mu_0 \tfrac{J}{2}(a-x) = Ja
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} a \hat{y};$$

quindi un campo uniforme in tutti i punti dell'intercapedine pari a $B = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} a = 320.0\,\mathrm{nT}$.

In alternativa, in notazione vettoriale, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1 &= \tfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \hat{z} \times (\vec{r} + \vec{a}) \\
\vec{B}_2 &= -\tfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \hat{z} \times (\vec{r} - \vec{a})
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \hat{z} \times (\vec{a} + \vec{a}) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \hat{z} \times \vec{a} = \frac{\mu_0 I a}{\pi R^2} \hat{y}$$

b)
Se la spira ruota con velocità angolare costante $\omega$ attorno al suo diametro passante per l'asse $x$ in essa comparirà la forza elettromotrice indotta $f_i$:

$$f_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} BScos(\omega t) = BS\omega \sin(\omega t).$$

la corrente che circola nella spira di resistenza trascurabile è derivabile dall'equazione del circuito-spira ponendo $R = 0$:

$$f_i - L\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow BS\omega \sin(\omega t) - L\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow i(t) = -\frac{BS}{L}\cos(\omega t);$$
$$i_{max} = \frac{BS}{L} \rightarrow S = \frac{Li_{max}}{B} \rightarrow r_s = \sqrt{\frac{Li_{max}}{\pi B}} = 2\,\mathrm{mm}.$$

c)
la potenza meccanica istantanea necessaria alla forza esterna per mantenere in rotazione a velocità costante la spira è calcolabile noto il momento meccanico e la velocità angolare come:

$$W = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = (\vec{m} \times \vec{B}) \cdot \vec{\omega} = \frac{B^2 S^2}{L} \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t);$$

la potenza media risulta nulla essendo trascurabile la resistenza elettrica della spira.