Luciano Maiani:
Quanta, Fields and Particles 1

Summary

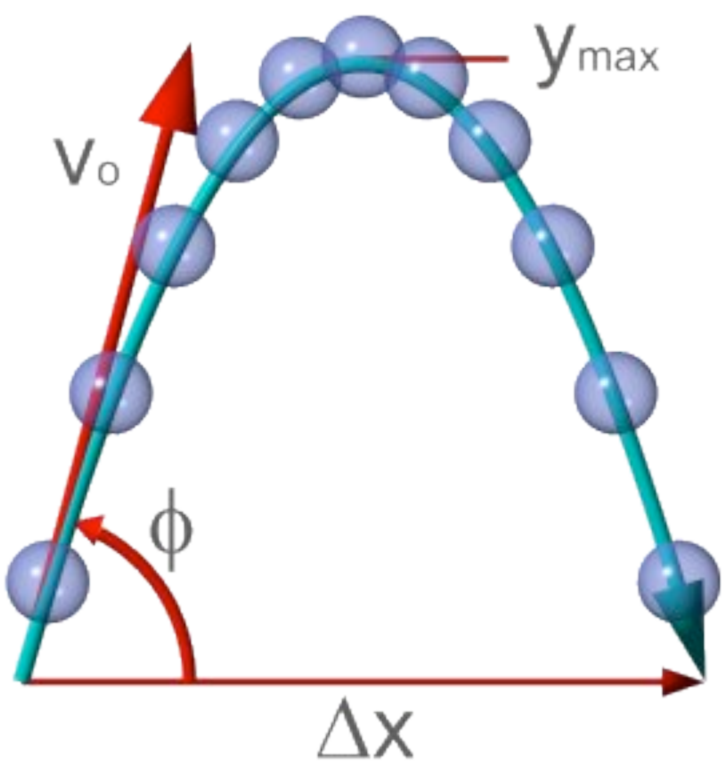
1. The principle of Least Action in Classical Mechanics
2. Max Planck solves the Black Body radiation problem and introduces Energy Quanta and the Quantum of Action
3. Albert Einstein revives the corpuscolar theory of light

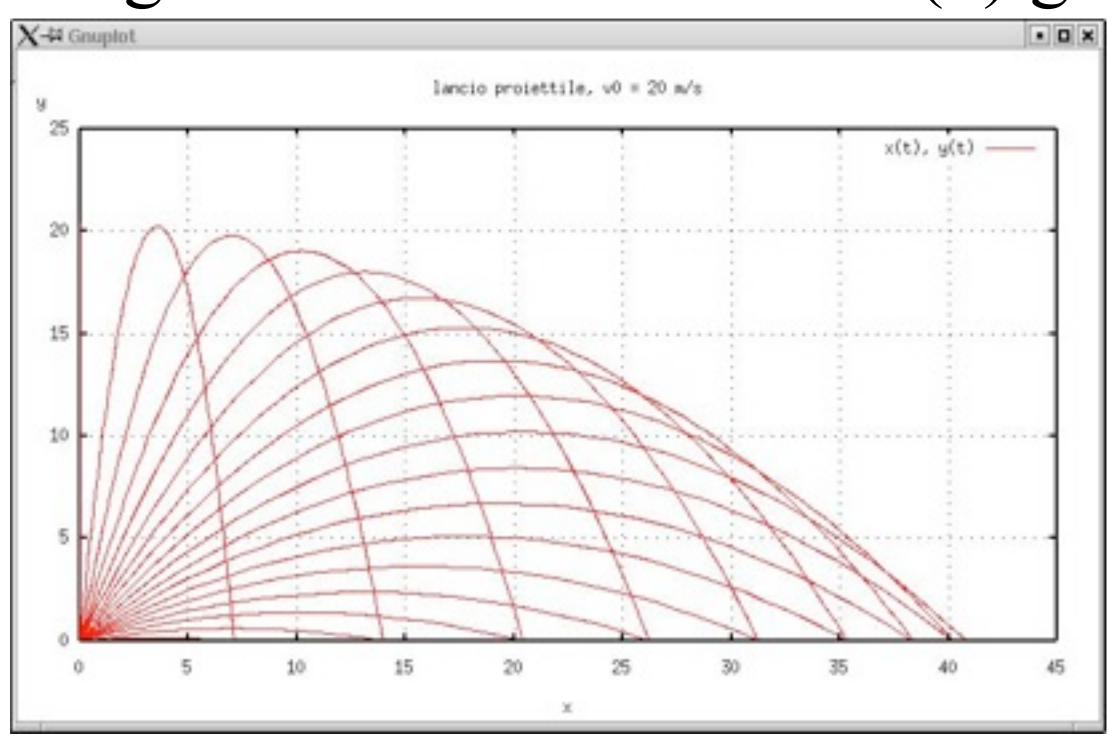
1. Classical Mechanics

- Starts with Newton's equations:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

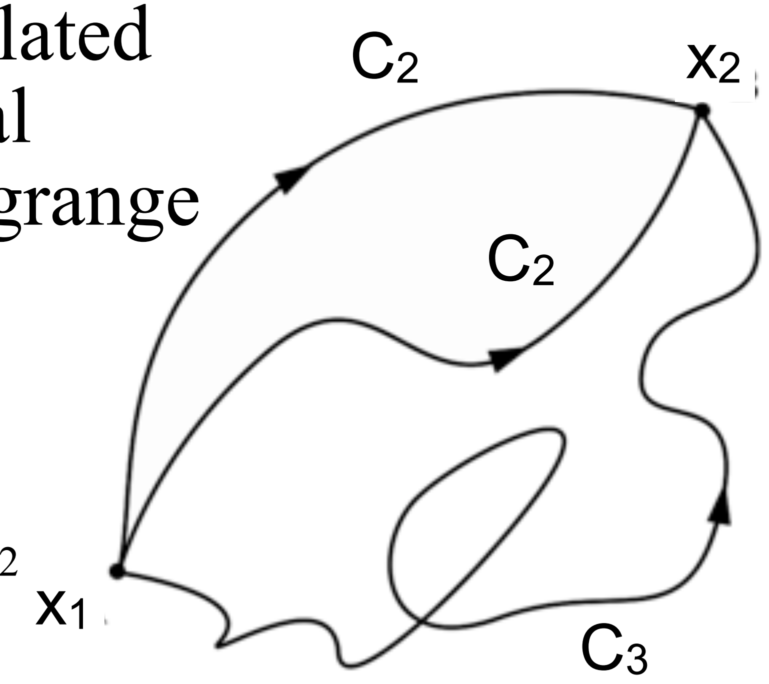
- forces: given, e.g. gravitational forces
- acceleration=(rate of change of (rate of change of x(t)))
- note: rate of change of x= velocity= v(t)
- differential equations, need ***two*** initial conditions: x(t=0), v(t=0) to determine al future evolution
- vector equations: all quantitie have intensity and directions.
  - increasing intensity of v(0), gets higher and reaches farther;
  - a change of the orientation of v(0) gives different trajectories





- incredible success, from falling apples to the motion of planets.

The principle of Least Action



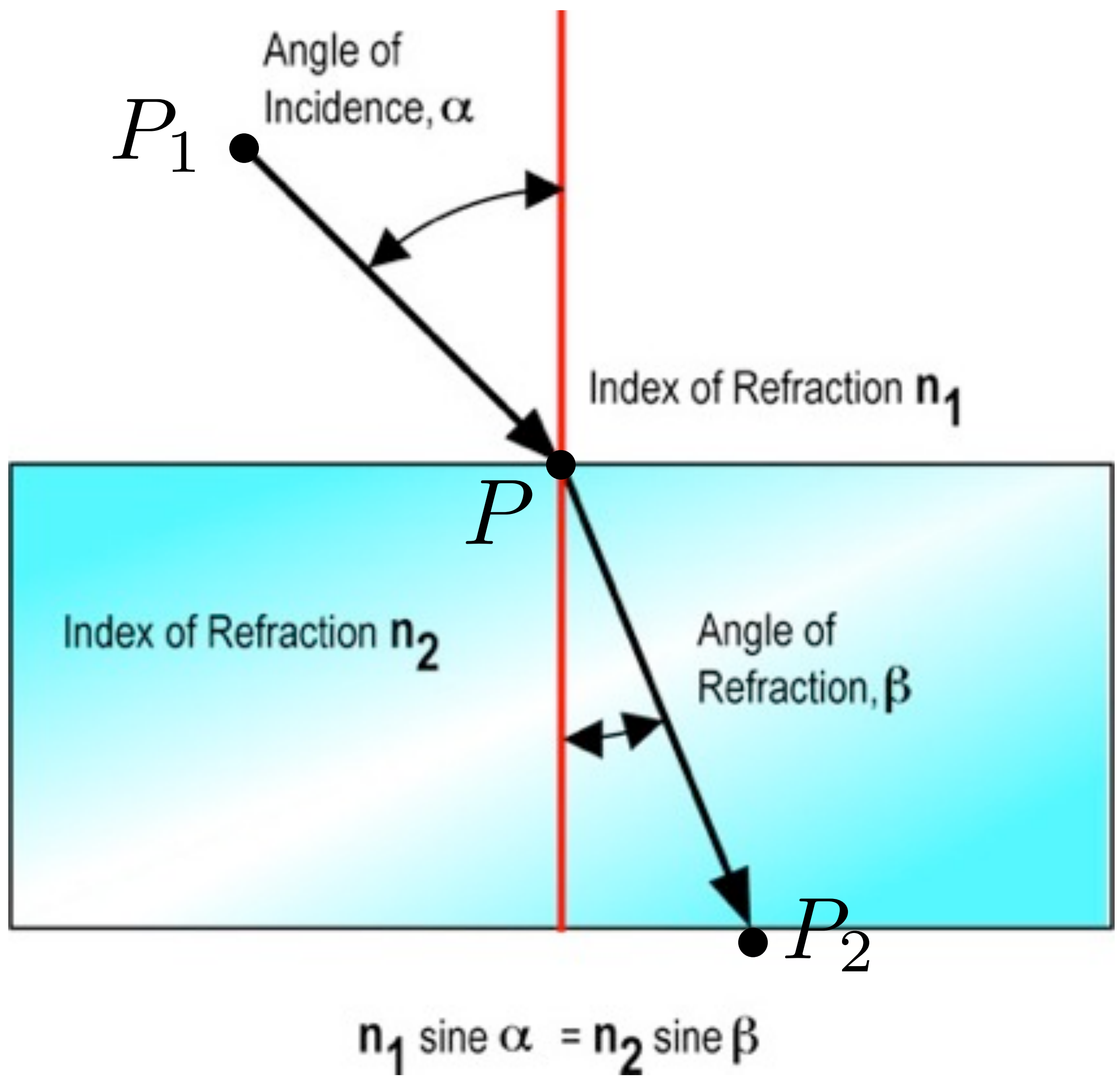
- Several mathematicians of the eighteenth century reformulated Newton's equations in a way more adapted to astronomical problems: Fermat, Maupertuis and above all Giuseppe Lagrange (Turin 1736, Paris 1813);
- imagine a point moving in space:
  - between two fixed points at two fixed times: x_1 at time t_1, x_2 at time t_2
  - along a given trajectory, C, with assigned velocities, v(t)
- Lagrange asserts that the true trajectory (the solution of Newton's equations) is the one that makes ***the Action***, a certain function of the trajectory and velocities, ***to assume its Minimum Value***.
- the Action has physical dimensions: energy x time (for a particle without forces it is simply: kinetic energy x time)
- for all mechanical problems (and later electromagnetic problems) we can find a suitable Action whose minimum gives the solution of the Newton's (and later Maxwell's) equations.

the “best of all possible worlds”

- why prefer Lagrange’s instead of Newton’s formulation?
  - the Action is a scalar quantity, it has no directions;
  - it exhibits all the symmetries of the problem: e.g. for central forces, it depends only on distances between particles;
  - takes care of possible constraints (inextendible ropes, rigid bodies, rails etc.) by introducing suitable coordinates
  - can be extended to cases (e.g. electromagnetism, optics,... particle physics) where identifying F=ma is not at all easy.
- In the eighteenth century, the principle of Minimum Action was given a philosophycal shade: *we live in the best of all possible worlds* (Leibniz, Maupertuis), i.e. among all possible trajectories, only one is realized in our world, ***that*** trajectory that minimizes the Action: there could not be any “better”;
- the optimistic mantra: “best of all possible worlds”, was contrasted by Voltaire in his novel *Candide:ou de l’Optimisme*, in the person of Candide’s teacher, Pangloss, and with examples such as the Seven Years War or the Lisbon earthquake
- Candide: *If this is the best of possible worlds, what then are the others*?

Least Action at work: light refraction

- light bends when passing from a less dense to a denser medium, $n_1 < n_2$, both $n > 1$.
- velocity of light in vacuum: c
- velocity in medium: $c/n < c$; time: $n\, l/c$
- suppose light source is in P_1, detector in P_2: what determines the trajectory ?
- the Least Action principle, in the form given by Fermat:
- Action(P_1->P_2) = time($P_1 \rightarrow P_2$) = Minimum.

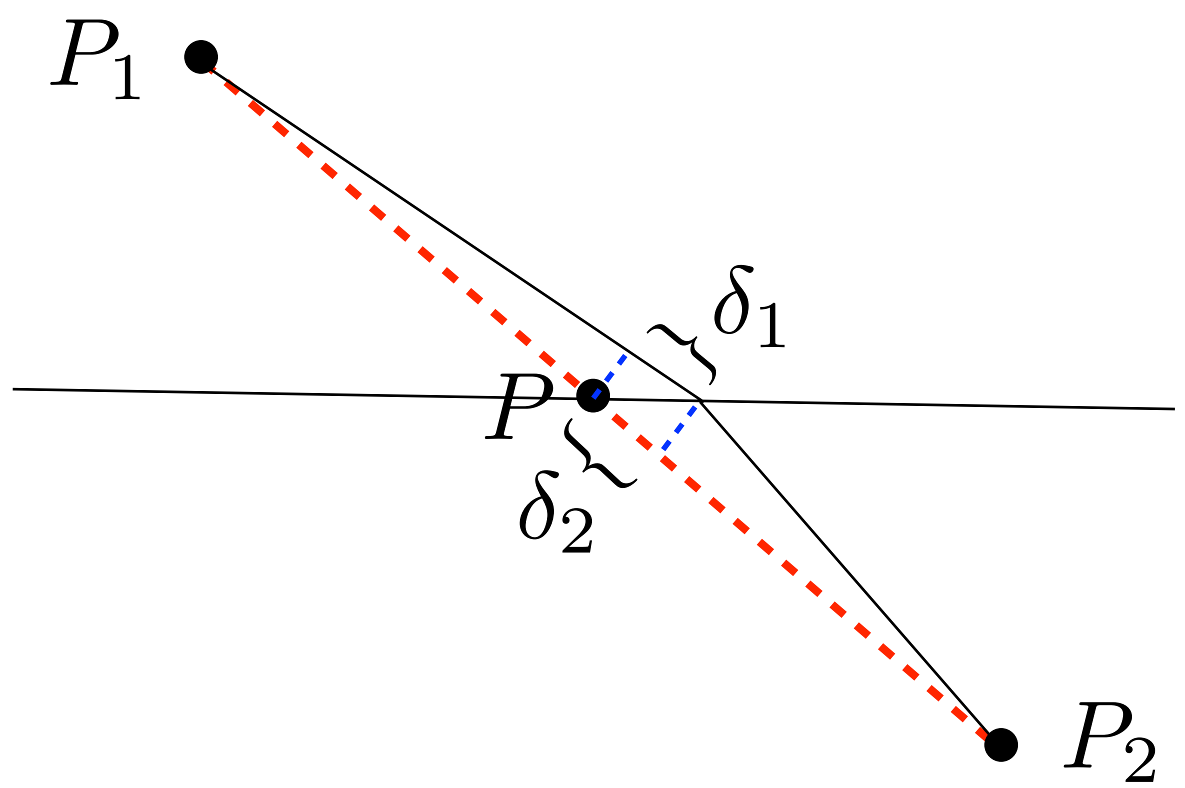


$$t(P_1 \rightarrow P_2) = \frac{n_1 l(P_1 \rightarrow P) + n_2 l(P \rightarrow P_2)}{c}$$

Snell's law

first the trivial case: $n_1=n_2$

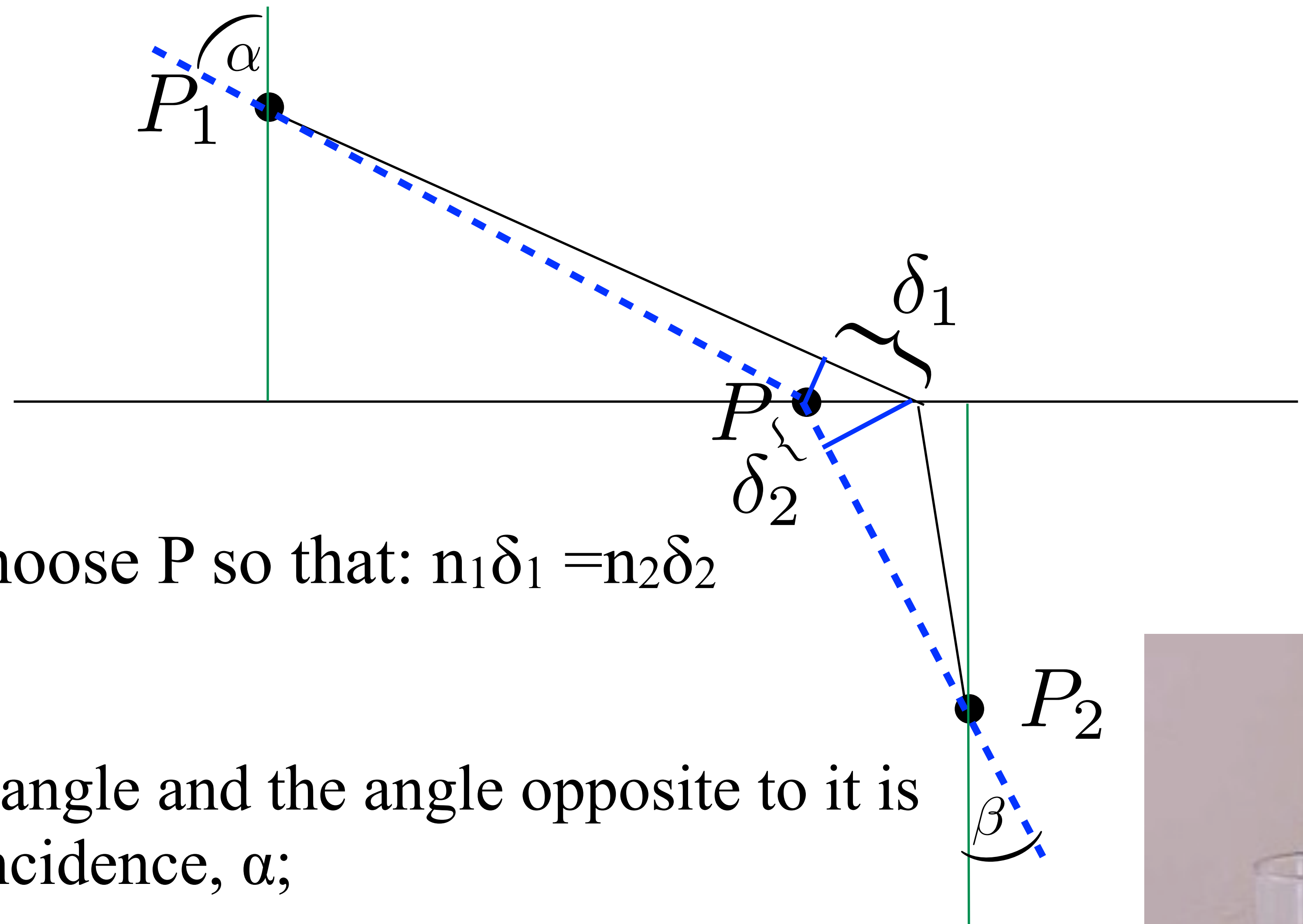
- $n_1=n_2= n$, constant velocity,
- shortest time= shortest path= straight line= the broken line;
- since this line gives the minimum time, if we move P a litte bit nothing has to change: $t' \simeq t_{min}$



- in fact we see that $\delta_1 \simeq \delta_2$, so that: $t'- t_{min} = n(\delta_1-\delta_2) \simeq 0$
- but if we now set $n_1<n_2$, we obtain: $t'- t_{min} = n_1\delta_1 - n_2\delta_2 \simeq (n_1- n_2)\delta_1 <0$
- the Action can be diminished by moving P on the right, until we find no gain again

$n_1 < n_2$

- Suppose P is the minimum point.
- If we move it further on the right there must be no gain



note:

- $\delta_1 > \delta_2$ and we must choose P so that: $n_1\delta_1 = n_2\delta_2$

•δ_1 is the side of a right triangle and the angle opposite to it is the same as the angle of incidence, α;

•same for δ_2 and β

•in total we find:

$$\delta_1 = \delta \sin\alpha; \;\; \delta_2 = \delta \sin\beta$$

i.e. from the condition of Minimum

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$ ... the Snell's Law

2. Max Planck solves the problem of Black Body radiation: a few facts

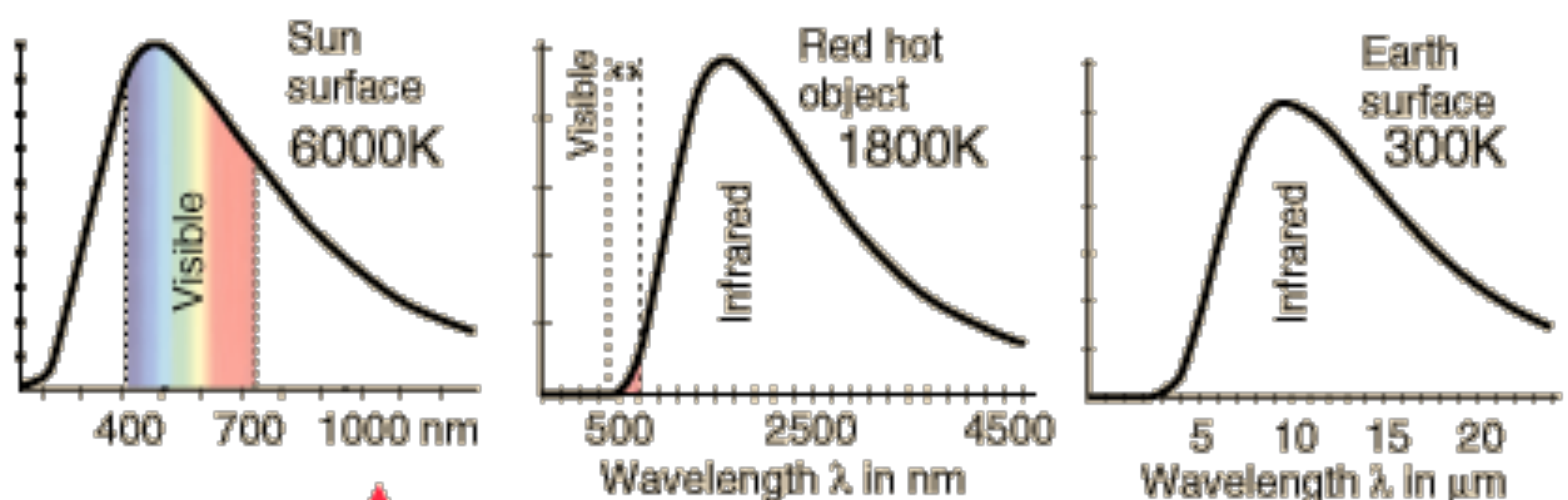
- An oven kept at fixed temperature, T, with a very small aperture;
- a light ray going through the aperture has very little chance to come back: the aperture looks black from the outside, ***hence the name "black body"***
- as it often happens, not all black is black:
  - thermal motion of the atoms of the inner walls excite oscillations of the electromagnetic field inside the cavity
  - exchange of energy between walls and the e.m. field leads to a thermal equilibrium
  - thermal energy is radiated out of the oven, through the aperture
- energy radiated by the oven is called ***"black body radiation"***
- usual ovens radiate in the infrared and we see the aperture to be black, at higher temperatures (say 2000 ^{o}K) the "black body" starts looking red
- the energy density of the black body depends upon frequency and temperature

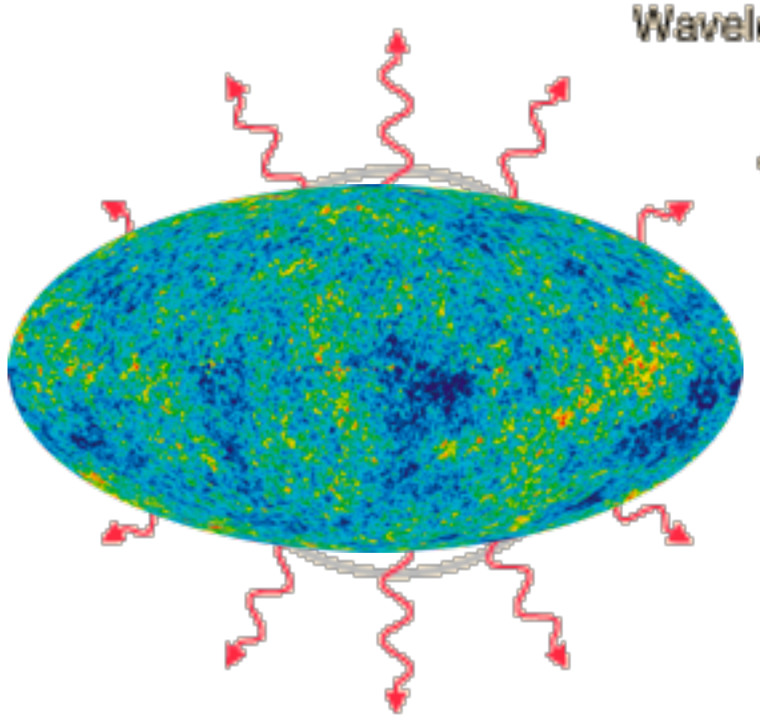
$$\Delta E = u(\nu, T)\ V \Delta\nu$$

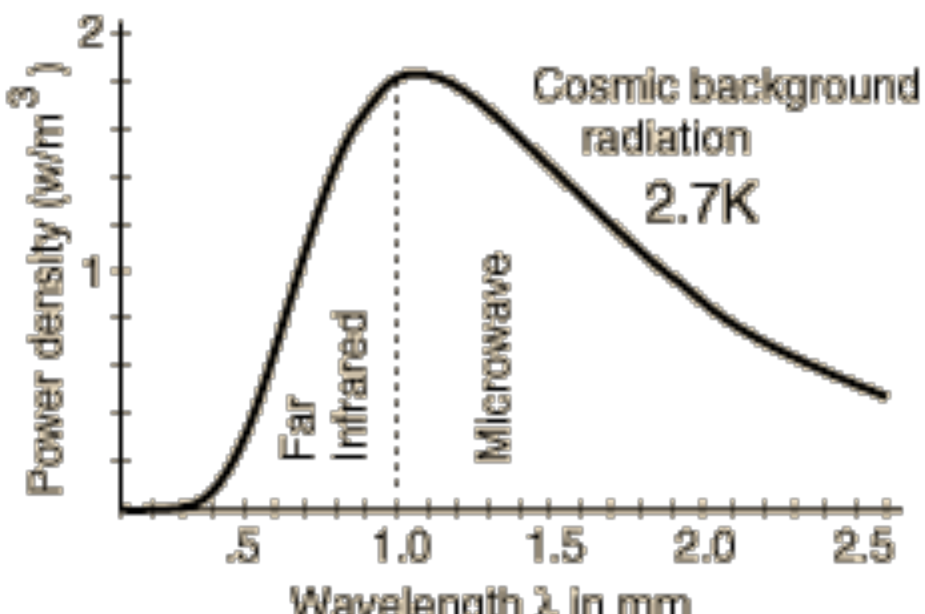
- V is the volume, ΔE is the energy with frequency between ν and $\nu + \Delta\nu$ and u(ν, T) is a "universal" function, i.e. is independent from the composition of the walls.

Examples of Black Bodies in Nature and the shape of the energy distribution

- note: λ= wavelenght=c/ν
- m= meter, mm=millimeter; μm= micrometer= 10^{-6} m, nm= nanometer =10^{-9} m

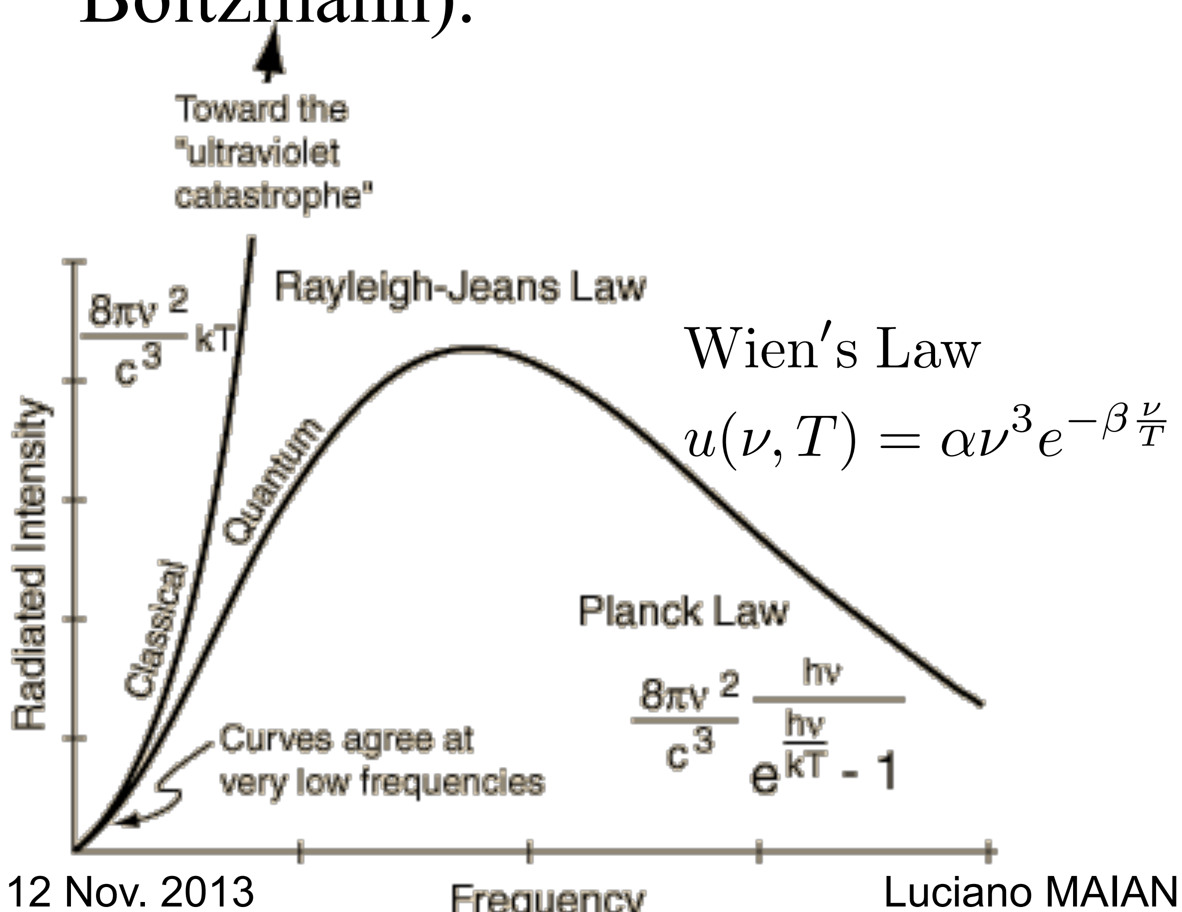






Ultraviolet catastrophe and Planck's solution (1900)

- according to classical mechanics each field oscillation has an average energy = kT
- this leads to the Raleigh-Jeans law which agrees for low frequency with the experimental curve, but it leads to the absurd result that u(ν, T) diverges for high frequency (ultraviolet catastrophe), so that the black body would irradiate always an infinite energy!
- on the contrary, u(ν, T) goes exponentially to zero for large ν, a law discovered by W. Wien;
- the total energy irradiated is finite and proportional to T^4 (Stephan-Boltzmann).



- In the year 1900, Max Planck advanced the idea that the energy of the oscillations could take only discrete values: E = nh, n = 0, 1, 2, ...
  with h a universal constant, known as the ***Planck's constant***
- the average energy of the oscillation becomes: $$< E >= \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$
- note that h is energy x time = action!!

3. Albert Einstein
Emissione e trasformazione della luce da un punto di vista euristico

Berna, 17 Marzo 1905

Annalen der Physik, 1905, vol. 17, pag. 132.

EISTEIN
Teoria dei Quanti di Luce
Tascabili Economici Newton (1993)

Secondo l'ipotesi che voglio qui proporre, quando un raggio di luce si espande partendo da un punto, l'energia non si distribuisce su volumi sempre più grandi, bensì rimane costituita da un numero finito di quanti di energia localizzati nello spazio e che si muovono senza suddividersi, e che non possono essere assorbiti od emessi parzialmente.

Entropia della radiazione

- Einstein parte dalla distribuzione spettrale dell' energia del corpo nero e si pone nel limite di alte frequenze/basse temperature, per cui vale "la legge stabilita dal Signor W. Wien":

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

- Einstein sa che la legge di Wien e' un caso limite della legge di Planck e che (in notazioni moderne) $\beta = \frac{h}{k}$ con h=cost. di Planck, k=cost. di Boltzmann
- Einstein segue la termodinamica standard e deriva da Wien l'entropia della radiazione alla frequanza tra ν e ν+Δν, trovando (vedi dopo):

$$S_\nu = k\,log(V^n) + f(E,\nu); \quad n = \frac{E_\nu}{h\nu}$$

- Se ricordiamo che (Boltzmann): S=k log P, con P la probabilità di quel particolare stato, vediamo che:

•la dipendenza di S da V e' quella di un gas di ***n oggetti statisticamente indipendenti nel volume V***:
•n "quanti", ciascuno con energia hν ovvero:
•un "gas" di fotoni !

Il calcolo

- Einstein parte dalla distribuzione spettrale dell' energia del corpo nero

$$E = V \int_0^\infty u(\nu, T)\, d\nu$$

e si pone nel limite di alte frequenze/basse temperature, per cui vale "la legge stabilita dal Signor W. Wien":

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

- Einstein sa che la legge di Wien e' un caso limite della legge di Planck e che (in notazioni moderne) $\beta = \frac{h}{k}$ con h=cost. di Planck, k=cost. di Boltzmann

- Con la legge di Wien, l' energia e' data in funzione di V e T, ma l' entropia si deve dare in funzione di E e V. Einstein segue la termodinamica standard, che prevede di ricavare T in funzione di E e V e usare il 2^0 Principio: 1/T e' il fattore che rende dQ un differenziale esatto. Inoltre, per variazioni con V = costante, dQ=dE. In formule:

$$E = V \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu$$

$$S = V \int_0^\infty \phi(\nu, \rho)\, d\nu \;; \quad dS_\nu = V d\phi \Delta\nu = \frac{V du \Delta\nu}{T(\rho)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{1}{T(u)} = -\frac{1}{\beta\nu}\, log(\frac{u}{\alpha\nu^3})$$

Il calcolo (cont.)

- ovvero:

$$S_\nu = V\ \phi(\nu,\rho)\Delta\nu = -\frac{V\Delta\nu}{\beta\nu}\ \rho[log(\frac{u}{\alpha\nu^3}) - 1]$$

- Se introduciamo l' energia nelle frequenze tra ν e ν+Δν: E_ν=V u dν, troviamo:

$$S_\nu = V\ \phi(\nu,u)\Delta\nu = -\frac{V\Delta\nu}{\beta\nu}\ u[log(\frac{u}{\alpha\nu^3}) - 1]$$

$$S_\nu =\ k\ \frac{E_\nu}{h\nu}[log(V\ \frac{\alpha\nu^3\ \Delta\nu}{E_\nu}) + 1]$$

$$S_\nu = k\ log(V^n) + f(E,\nu); \quad n = \frac{E_\nu}{h\nu}$$

- la dipendenza da V e' quella di un gas di ***n oggetti statisticamente indipendenti***:
- n "quanti", ciascuno con energia hν
- un "gas" di fotoni !!

- per confronto, l'entropia di un gas perfetto monoatomico di N particelle nel volume V è(ma vedi Kittel, Statistical Mechanics) per il paradosso di Gibbs):

$$S = k\ log\left[V^N\left(\frac{E}{N}\right)^{3/2}\right]$$

L' effetto fotoelettrico

Einstein considera diversi casi in cui l' ipotesi dei quanti rende conto di risultati sperimentali inspiegabili con la teoria di Maxwell. Il piu' eclatante e' l' *Emissione di raggi catodici tramite esposizione di corpi solidi* (effetto fotoelettrico)

Ad uscire dal corpo con la massima velocità normale saranno gli elettroni eccitati che si trovano direttamente alla sua superficie e che acquistano una velocità normale ad essa. L'energia cinetica di tali elettroni è:

$$\frac{R}{N}\beta\nu - P$$

Se il corpo ha un potenziale positivo Π ed è circondato da conduttori a potenziale nullo e se Π è in grado di impedire una perdita di elettricità del corpo, otteniamo

$$\Pi\varepsilon = \frac{R}{N}\beta\nu - P$$

dove ϵ rappresenta la carica elettrica dell'elettrone,

Nota :

$$\beta = \frac{h}{k}$$

$$\frac{R}{N}\beta\nu = h\nu$$

P= potenziale di estrazione

L' effetto fotoelettrico

=Ne

$\Pi E = R\beta\nu - P'$

=Nhv

Al fine di controllare se la relazione da noi derivata è verificata dall'esperienza per quanto concerne il suo ordine di grandezza, poniamo $P' = 0$, $\nu = 1{,}03 \cdot 10^{15}$ (corrispondente al limite dello spettro solare dalla parte dell'ultravioletto) e $\beta = 4{,}866 \cdot 10^{-11}$. Otteniamo $\Pi \cdot 10^7 = 4{,}3$ volt, il quale concorda, per quanto riguarda l'ordine di grandezza, con i risultati conseguiti dal Signor Lenard (9).

- al di sotto di un valore di soglia in $\nu_0 = P'/Nh$ non si osservano elettroni, per qualsiasi intensita' della luce;
- non c'e' soglia nell' intensita' della luce, solo meno elettroni, che corrisponde a meno fotoni assorbiti;
- ricordiamo che l' aspetto corpuscolare prevale a valori elevati di ν (legge di Wien).
- In anni successivi, Einstein ricavera' il valore dell' impulso del fotone $p=h/\lambda$, relazione verificata nell' effetto Compton: $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$;
- ma....???!!! l' energia del fotone e' fissata da un aspetto ondulatorio, ν !!!
- come riconciliare fotone-corpuscolo e luce-onda???
- Risposta (Copenhagen): ***dobbiamo abbandonare la pretesa di poter prevedere deterministicamente il comportamento del singolo fotone, ma solo la probabilità dei possibili risultati***