

CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2023/2024 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 10 luglio 2024

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				
----------	--	--	--	--

1 Studiare la funzione $y(x) = x - \sqrt{3x-2}$ e tracciarne il grafico. Quindi calcolare l'area compresa tra l'asse x e la curva $y(x)$ tra gli zeri di quest'ultima.

[punteggio 6]

Il dominio della funzione è $D = [\frac{2}{3}, \infty)$

Risultato $y(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

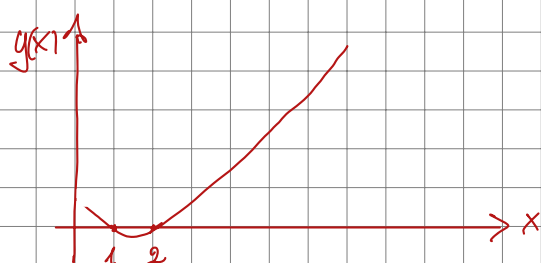
Gli zeri di $y(x)$ sono le soluzioni di $x = \sqrt{3x-2}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$y'(x) = 1 - \frac{3}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}} \quad y'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3x-2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x-2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 3x = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{9} \text{ che risulta}$$

un punto di minimo ($y''(\frac{10}{9}) > 0$) per $y(x)$



$$\text{Area} = \int_1^2 (0 - y(x)) dx$$

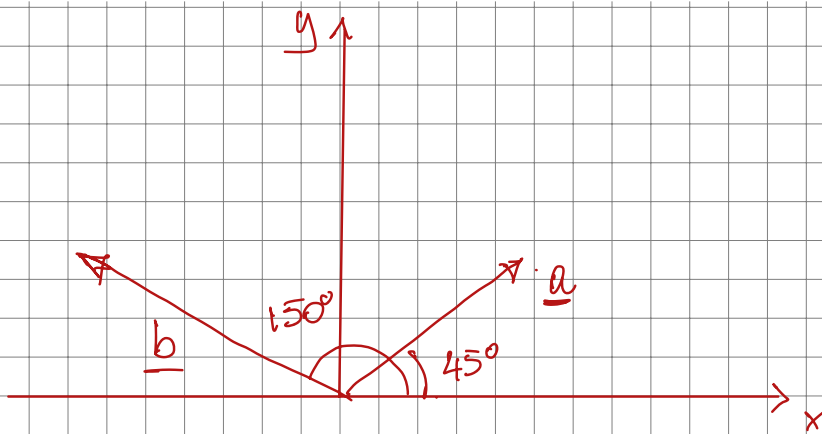
$$= \int_1^2 (\sqrt{3x-2} - x) dx$$

$$= \left. \frac{2}{9} (3x-2)^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right|_1^2 = \frac{2}{9} (4^{3/2} - 1^{3/2}) - \frac{1}{2} (4-1)$$

$$= \frac{14}{9} - \frac{3}{2} = \frac{28-27}{18} = \frac{1}{18}$$

2 Dato il vettore $\mathbf{a}$ di lunghezza 2 che forma un angolo di 45° con l'asse x e il vettore $\mathbf{b}$ di lunghezza 3 che forma un angolo di 150° con l'asse x (come al solito gli angoli sono misurati positivamente per rotazioni antiorarie rispetto all'asse di riferimento), determinare il numero q tale che $\mathbf{a} + q\mathbf{b}$ è ortogonale ad $\mathbf{a}$.

[punteggio 5]



$$\underline{a} = (2 \cos(45^\circ), 2 \sin(45^\circ)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\underline{b} = (3 \cos(150^\circ), 3 \sin(150^\circ)) = (-3 \cos(30^\circ), 3 \sin(30^\circ)) \\ = \left(-3 \frac{\sqrt{3}}{2}, 3 \frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{a} + q \underline{b} = \left(\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} q, \sqrt{2} + \frac{3}{2} q\right)$$

$$\underline{a} + q \underline{b} \perp \underline{a} \Leftrightarrow (\underline{a} + q \underline{b}, \underline{a}) = 0$$

$$(\underline{a} + q \underline{b}, \underline{a}) = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} q + 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} q \\ = 4 - \frac{3}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1) q = 0$$

$$q = \frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{3} - 1)}$$

3 Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + y - 2z = -3 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}.$$

[punteggio 5]

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 & R_1 \\ x + y - 2z = -3 & R_2 \\ 3x - 2y + z = 2 & R_3 \end{cases}$$

eliminiamo x
delle righe R_2 e R_3

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 & R_1 \\ 5y - 5z = -5 & R_4 = 2R_2 - R_1 \\ 5y - z = 7 & R_5 = 2R_3 - 3R_1 \end{cases}$$

eliminiamo y
della riga R_5

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 & R_1 \\ 5y - 5z = -5 & R_4 \\ 4z = 12 & R_6 = R_5 - R_4 \end{cases}$$

risolviamo R_6
poi R_4 infine R_1

$$\begin{cases} z = 12/4 = 3 \\ y = -1 + z = -1 + 3 = 2 \\ x = (-1 - z + 3y)/2 = (-1 - 3 + 6)/2 = 1 \end{cases}$$

4 Si consideri la funzione

$$p(x) = c x(9 - x^2)^5, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Determinare la costante reale c tale che $p(x)$ definisca una PDF (funzione densità di probabilità) sull'intervallo $D = [0, 3]$. Per tale valore di c , determinare la CDF (funzione di distribuzione cumulativa di probabilità) $F(y)$ associata a $p(x)$.

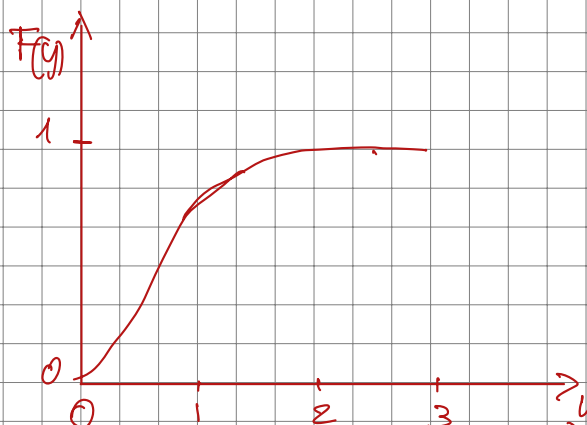
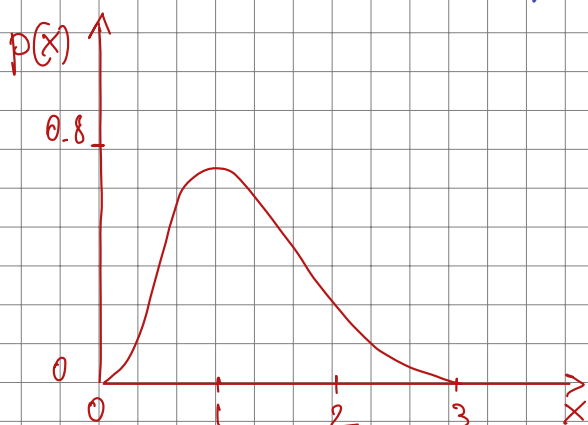
[punteggio 5]

$$\text{Per } x \in [0, 3] \quad p(x) = c x (9 - x^2)^5 \geq 0 \text{ se } c > 0$$

$$\text{Imponendo } 1 = \int_D p(x) dx \text{ troviamo}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^3 c x (9 - x^2)^5 = c \left(9 - x^2\right)^6 \left(-\frac{1}{12}\right) \Big|_0^3 \\ &= c \frac{1}{12} (9^6 - 0) = c \frac{9^6}{12} \Rightarrow c = \frac{12}{9^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^y p(x) dx \\ &= \int_0^y \frac{12}{9^6} x (9 - x^2)^5 dx \\ &= \frac{12}{9^6} \left(9 - x^2\right)^6 \left(-\frac{1}{12}\right) \Big|_0^y \\ &= \frac{12}{9^6} \left(\frac{9^6}{12} - \left(9 - y^2\right)^6 \frac{1}{12} \right) \\ &= 1 - \left(9 - y^2\right)^6 / 9^6 \\ &= 1 - \left(1 - \left(\frac{y}{3}\right)^2\right)^6 \end{aligned}$$



5 Un treno parte a intervalli di 20 minuti a partire dalle 5:00 della mattina (partenze alle 5:00, 5:20, 5:40, etc.). Un pendolare arriva in stazione ad un orario casuale uniformemente distribuito tra le 5:00 e le 5:20. Calcolare la probabilità che il pendolare attenda il treno meno di 15 minuti e la probabilità che ne attenda almeno 10. Determinare infine media e varianza del tempo di attesa T del pendolare.

[punteggio 6]

Le v.e. continue T ha PDF $f(x) = \begin{cases} 1/20 & 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$P(T \leq 15) = \int_0^{15} f(x) dx = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$P(T \geq 10) = \int_{10}^{20} f(x) dx = \frac{1}{20} (20 - 10) = \frac{1}{2}$$

$$E(T) = \int_0^{20} x f(x) dx = \frac{1}{20} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{20} = \frac{20}{2} = 10 \text{ min}$$

$$E(T^2) = \int_0^{20} x^2 f(x) dx = \frac{1}{20} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{20} = \frac{400}{3} \text{ min}^2$$

$$\text{var}(T) = E(T^2) - E(T)^2 = 400 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{400}{12} \text{ min}^2$$

$$\sigma(T) = \sqrt{\text{var}(T)} = \frac{20}{2\sqrt{3}} \text{ min} = \frac{1}{\sqrt{3}} E(T)$$

6 La popolazione maschile negli USA ha un peso descritto da una variabile normale X di media $\mu = 176$ pounds e deviazione standard $\sigma = 19$ pounds. Sapendo che 1 pound = 453 grammi, calcolare la probabilità che un individuo abbia un peso compreso tra 65 e 75 Kg.

[punteggio 6]

Si osservi che se $X \sim N(\mu, \sigma)$ allora $Y = cX$ con c costante reale è una variabile aleatoria $Y \sim N(c\mu, c\sigma)$

Posto $c = 0.453$ Kg/Pound il peso in Kg della popolazione maschile USA è una v.a. normale Y di media e deviazione standard

$$c\mu = 176 \cdot 0.453 \approx 79.73 \text{ Kg}$$

$$c\sigma = 19 \cdot 0.453 \approx 8.61 \text{ Kg}$$

Dobbiamo calcolare

$$P(65 < Y < 75) = P(Y < 75) - P(Y < 65)$$

A partire da Y costruiamo la v.a. normale standard

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)} = \frac{Y - c\mu}{c\sigma} = \frac{Y - 79.73}{8.61}$$

$$\text{Per } Y = 75 \text{ si ha } Z = \frac{75 - 79.73}{8.61} = -0.55$$

$$\text{Per } Y = 65 \text{ si ha } Z = \frac{65 - 79.73}{8.61} = -1.71$$

Quindi

$$P(Y < 75) = P(Z < -0.55) = 1 - P(Z < 0.55) = 0.2912$$

$$P(Y < 65) = P(Z < -1.71) = 1 - P(Z < 1.71) = 0.0436$$

$$\text{In conclusione } P(65 < Y < 75) = 0.2476$$

Table of the Standard Normal Distribution

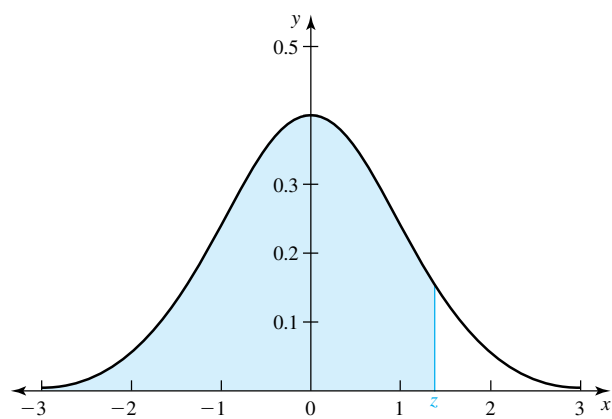


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z .

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986