CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2024/2025 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 14 luglio 2025

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				

1 Il numero di volpi che popolano una riserva protetta varia nel corso dei mesi in modo ben approssimato dalla successione

$$N_k = 28 + \frac{12k^2 - 10}{e^2k^2 - 2ek}\left(1 + \frac{2}{k}\right)^k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Determinare il valore asintotico di N_k.

[punteggio 5]

$$N_k = 28 + f(k)\, g(k) \qquad f(k) = \frac{12k^2 - 10}{e^2k^2 - 2ek} \qquad g(k) = \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k$$

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{12 - 10/k^2}{e^2 - 2e/k} = \frac{12}{e^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} g(k) = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k \quad \text{forma indeterminata } 1^\infty$$

$$= \lim_{k\to\infty} \exp\left[k \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\lim_{k\to\infty} k \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)\right] \quad \text{forma indeterm. } \infty \cdot 0$$

$$= \exp\left[\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{1/k}\right] \quad \text{forma indeterm. } \frac{0}{0}$$

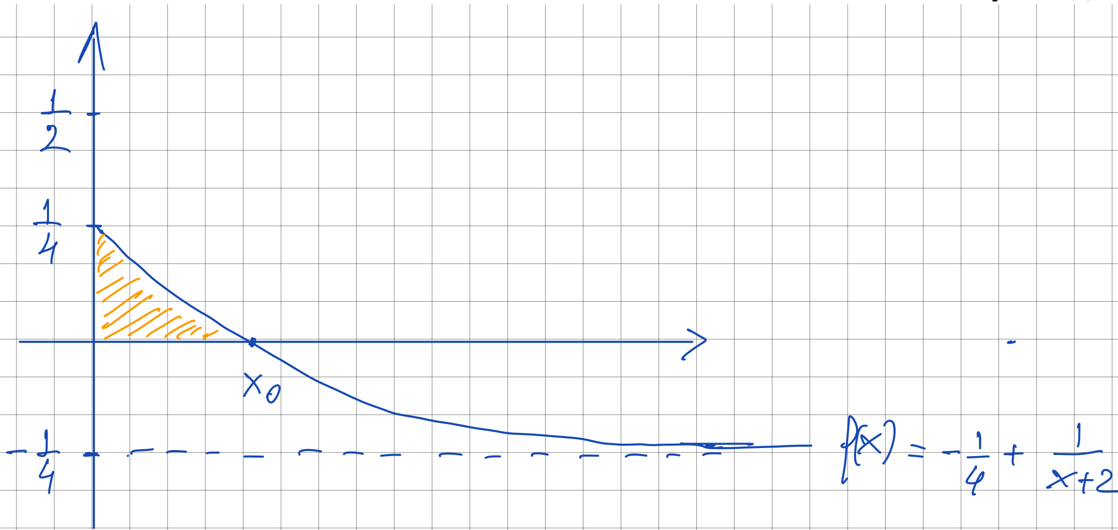
$$= \exp\left[\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{1+2/k}\left(-\frac{2}{k^2}\right)}{-1/k^2}\right] = \exp[2] = e^2$$

Pertanto $\lim_{k\to\infty} N_k = 28 + \frac{12}{e^2} e^2 = 28 + 12 = 40$

2 Determinare l'area della regione di piano compresa tra il semiasse positivo delle ascisse, l'asse delle ordinate e la curva di equazione

$$f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{4}.$$

[punteggio 6]



$f(x_0) = 0 \qquad \frac{1}{x_0+2} = \frac{1}{4} \qquad x_0 + 2 = 4 \qquad x_0 = 2$

$$\text{Area} = \int_0^{x_0} \left(f(x) - 0\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= \ln|x+2| - \frac{x}{4} \Big|_0^2$$

$$= \ln 4 - \frac{2}{4} - \ln 2 + 0$$

$$= \ln \frac{4}{2} - \frac{2}{4} = \ln 2 - \frac{1}{2} \simeq 0.193$$

3 Dopo la somministrazione orale di una dose di 500 mg di amoxicillina, la sua concentrazione nel sangue (in μg/mL) può essere approssimata dalla funzione

$$C(t) = 12\left(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{3}{2}t}\right),$$

dove $t \geq 0$ è il tempo (in ore) trascorso dalla somministrazione. Determinare gli intervalli di monotonia della concentrazione e stabilire la presenza di eventuali massimi e minimi. Scrivere l'equazione della retta tangente a $C(t)$ in $t = 0$.

[punteggio 6]

$$C'(t) = 12\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\right)$$

$C'(t) = 0$ $\quad \frac{1}{\cancel{2}}e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{3}{\cancel{2}}e^{-\frac{3}{2}t}$ $\quad -\frac{1}{2}t = \ln 3 - \frac{3}{2}t$

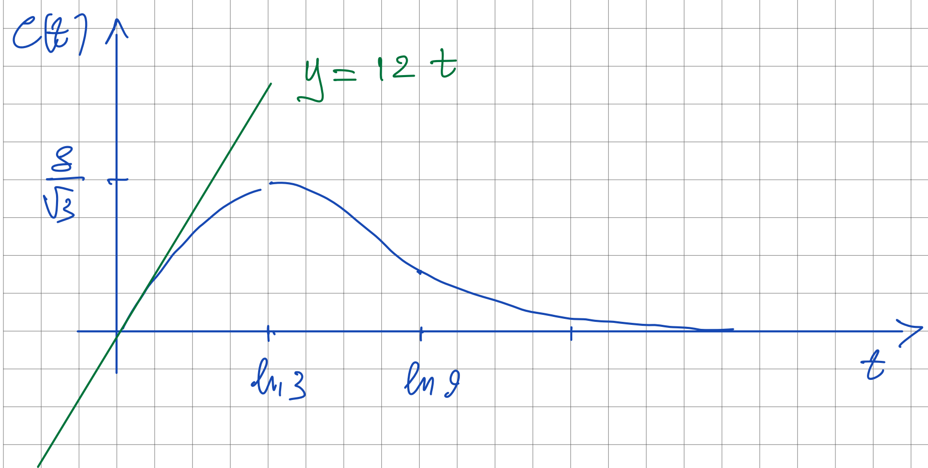
$t = \ln 3$

$C'(0) = 12 > 0$ $\quad C'(t) \sim -6e^{-\frac{1}{2}t}$ per t grande

Segue che $C'(t) > 0$ per $t \in [0, \ln 3)$ $C(t)$ cresce

$C'(t) < 0$ per $t \in (\ln 3, \infty)$ $C(t)$ decresce

$C(t)$ ha un massimo assoluto in $t = \ln 3$ e un cambio di concavità in $t = \ln 9$ soluzione di $C''(t) = 0$



La retta tangente a $C(t)$ in $t = 0$ ha equazione

$y - C(0) = C'(0)(t - 0)$ $\quad$ Poiché $C(0) = 0$ $\quad C'(0) = 12$

$y = 12t$

4 Un dado equilibrato viene lanciato otto volte. Trovare la probabilità dei seguenti eventi:
i) il numero tre non esce mai;
ii) il numero quattro esce almeno una volta;
iii) escono tanti numeri dispari quanti pari.

[punteggio 5]

---

i) Sia X_k la v.a. di Bernoulli $X_k = \begin{cases} 1 & \text{se esce } 3 \quad p = \frac{1}{6} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e $S_n \sim Bin(n, p)$ la v.a. Binomiale $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$

P(il 3 non esce mai in 8 lanci)

$$= P(S_8 = 0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^8 \simeq 0.23$$

ii) Sia X_k la v.a. di Bernoulli $X_k = \begin{cases} 1 & \text{se esce } 4 \quad p = \frac{1}{6} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e $S_n \sim Bin(n, p)$ la v.a. Binomiale $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

P(il 4 esce almeno una volta in 8 lanci)

$$= P(S_8 \geq 1) = 1 - P(S_8 = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \simeq 0.77$$

iii) Sia X_k la v.a. di Bernoulli $X_k = \begin{cases} 1 & \text{se esce pari} \quad p = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e $S_n \sim Bin(n, p)$ la v.a. Binomiale $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

P(escono tanti pari quanti dispari in 8 lanci)

$$= P(S_8 = 4) = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^{8-4} = \frac{8!}{4!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}\; 2^8} = \frac{35}{2^7} = \frac{35}{128} \simeq 0.27$$

5 Dimostrare che se due eventi A e B sono indipendenti, pure indipendenti sono gli eventi complementari A^c e B^c. Si considerino allora tre eventi mutuamente indipendenti A_1, A_2 e A_3 realizzati con probabilità $P(A_1) = 1/8$, $P(A_2) = 2/5$ e $P(A_3) = 1/5$. Determinare la probabilità con cui si realizza almeno uno dei tre eventi.

[punteggio 6]

A e B sono indipendenti se e solo se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B) \right) \\
&= 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \right) \\
&= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^c)\, P(B^c)
\end{aligned}$$

Quindi anche A^c e B^c sono indipendenti

Siano A_1 A_2 e A_3 mutuamente indipendenti

L'evento in cui almeno uno dei tre eventi si realizza è

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ e la sua probabilità vale

$$\begin{aligned}
P(A) = 1 - P(A^c) &= 1 - P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) \\
&= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\
&= 1 - P(A_1^c)\, P(A_2^c)\, P(A_3^c) \\
&= 1 - (1 - P(A))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) \\
&= 1 - \frac{7}{8} \frac{3}{5} \frac{4}{5} \\
&= 1 - \frac{21}{50} = \frac{29}{50}
\end{aligned}$$

6 La variabile aleatoria X ha distribuzione uniforme nell'intervallo $[a, b]$ con $a = 1$. Se $P(2 \leq X \leq 4) = 1/5$, qual'è il valore di b? Assumendo per b il valore così ottenuto, determinare il valore medio di X.

[punteggio 5]

$X \sim U(a, b)$ con $a=1$ ha PDF $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 f(x)\, dx$$

se $b \geq 4$ $\quad = \int_2^4 \frac{1}{b-1}\, dx = x \frac{1}{b-1} \Big|_2^4 = \frac{2}{b-1}$

Quindi $\quad \frac{2}{b-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow b-1 = 10 \Rightarrow b = 11$

se $2 < b \leq 4$ $\quad = \int_2^b \frac{1}{b-1}\, dx = \frac{x}{b-1} \Big|_2^b = \frac{b-2}{b-1}$

Quindi $\quad \frac{b-2}{b-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5b - 10 = b - 1 \Rightarrow b = \frac{9}{4}$

Si osservi che non può essere $b \leq 2$ altrimenti $P(2 \leq X \leq 4) = 0$

$$E(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx = \frac{x^2/2}{b-a} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

se $b = 11$ $\quad E(X) = \frac{1+11}{2} = 6$

se $b = \frac{9}{4}$ $\quad E(X) = \frac{1 + 9/4}{2} = \frac{13}{8}$

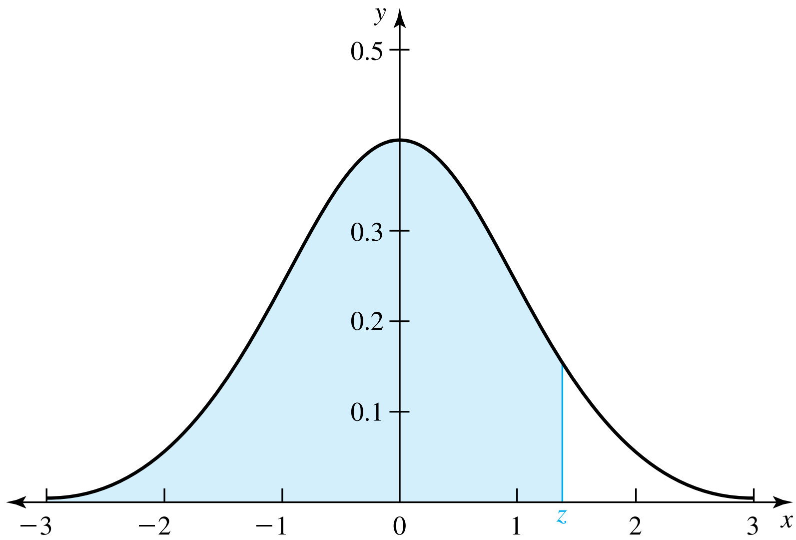


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z.

z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986