

CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2024/2025 – Prof. C. Presilla

Prova A5 – 15 settembre 2025

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				
----------	--	--	--	--

1 Una squadra di soccorso deve essere formata da 3 vigili del fuoco e 2 medici. Avendo a disposizione 5 vigili del fuoco e 4 medici, quante diverse squadre di soccorso sono possibili?

[punteggio 5]

Possiamo scegliere 3 dei 5 vigili del fuoco in

$$N_1 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

modi diversi

Possiamo scegliere 2 dei 4 medici in

$$N_2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

modi diversi

Per il principio di moltiplicazione il numero di diverse squadre di soccorso formabili è

$$N = N_1 \cdot N_2 = 60$$

2 Dato il vettore $\underline{a}$ di lunghezza 2 che forma un angolo di 45° con l'asse x e il vettore $\underline{b}$ di lunghezza 3 che forma un angolo di 150° con l'asse x (come al solito gli angoli sono misurati positivamente per rotazioni antiorarie rispetto all'asse di riferimento), determinare il numero q tale che $\underline{a} + q\underline{b}$ è ortogonale ad $\underline{a}$.

[punteggio 5]

$$\underline{a} = (a_x, a_y) \quad a_x = a_y = a \cos(45^\circ) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\underline{b} = (b_x, b_y) \quad b_x = b \cos(150^\circ) = -b \cos(30^\circ) = -3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b_y = b \sin(150^\circ) = b \sin(30^\circ) = 3 \frac{1}{2}$$

Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, imponiamo perciò

$$(\underline{a} + q \underline{b}, \underline{a}) = (a_x + q b_x) a_x + (a_y + q b_y) a_y = 0$$

$$\left(\sqrt{2} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} q\right) \sqrt{2} + \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2} q\right) \sqrt{2} = 0$$

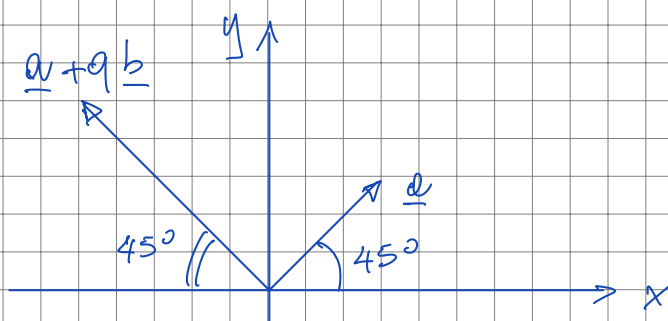
$$\frac{3}{2} (\sqrt{3} - 1) q = 2 \sqrt{2}$$

$$q = \frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{3}-1)}$$

Controllo:

$$a_x + q b_x = \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$$

$$a_y + q b_y = \sqrt{2} + \frac{3}{2} \frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$$



3 Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy(x)}{dx} + \frac{y(x)}{x} = 1$$

[punteggio 6]

L'equazione può essere risolta con il metodo del fattore integrante $A(x)$

Posto $A'(x) = \frac{1}{x}$ e quindi $A(x) = \ln x + C_1$, moltiplicando membro a membro per $e^{A(x)}$ abbiamo

$$e^{A(x)} y'(x) + e^{A(x)} A'(x) y(x) = e^{A(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \left(e^{A(x)} y(x) \right) = e^{A(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{Osservando che } \int e^{A(x)} dx &= \int e^{\ln x + C_1} dx \\ &= \int x e^{C_1} dx = \frac{x^2}{2} e^{C_1} + C_2 \end{aligned}$$

integrando membro a membro l'equazione abbiamo

$$e^{A(x)} y(x) + C_3 = x e^{C_1} y(x) + C_3 = \frac{x^2}{2} e^{C_1} + C_2$$

da fornire

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{C_2 - C_3}{x e^{C_1}} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x} \quad C \in \mathbb{R}$$

Controllo:

$$y'(x) = \frac{1}{2} - \frac{C}{x^2} \quad \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$$

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{C}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2} = 1 \quad \checkmark$$

4 Determinare per quale valore della costante $c \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} cx/(1+x^2) & x \in [0, e] \\ 0 & x \notin [0, e] \end{cases}$$

rappresenta una densità di probabilità (PDF). Per questo valore di c trovare il massimo assoluto di $f(x)$ e l'espressione della corrispondente funzione di distribuzione $F(x)$, $x \in [0, e]$ (CDF).

[punteggio 5]

$f(x)$ è una PDF se $f(x) \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

La prima condizione è soddisfatta per $c \geq 0$

Per la seconda abbiamo

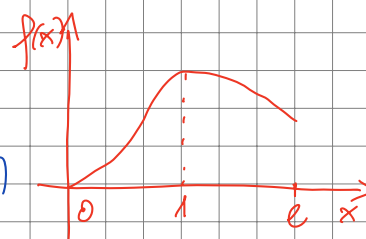
$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^e \frac{cx}{1+x^2} dx = \frac{c}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^e$$

$$= \frac{c}{2} \ln(1+e^2) \Rightarrow c = \frac{2}{\ln(1+e^2)} > 0$$

$f'(x) = 0$ fornisce $\frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 0$ cioè $x = \pm 1$

in $x=1$ si ha $f(1) = \frac{c}{2}$

inoltre $f(0) = 0$ e $f(e) = \frac{ce}{1+e^2} < f(1)$



Pertanto il max assoluto è raggiunto in $x=1$ e vale

$$f(1) = \frac{1}{\ln(1+e^2)}$$

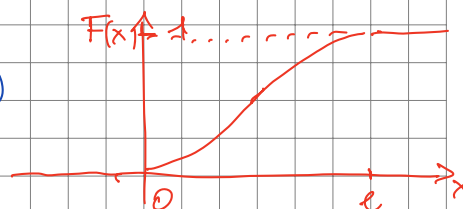
La CDF è definita $F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$

$$F(x) = 0 \quad x \leq 0$$

$$\text{per } 0 \leq x \leq e \quad F(x) = \int_0^x \frac{cz}{1+z^2} dz = \frac{2}{\ln(1+e^2)} \frac{1}{2} \ln(1+z^2) \Big|_0^x$$

$$= \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+e^2)}$$

$$F(x) = 1 \quad \text{per } x \geq e$$



5 Circa il 10% delle piante coltivate in una serra è infestata da acari. Un agronomo prende a caso un campione di 5 piante. Qual'è la probabilità che almeno 3 piante nel campione siano infestate? Quante piante infestate ci si aspetta di trovare in media in un campione casuale di 10 piante?

[punteggio 6]

Sia X la v.e. di Bernoulli che segna l'infestazione da acari di una singola pianta

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se la pianta è infestata} \\ 0 & \text{se non lo è} \end{cases}$$

si ha $P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$ con $p=0.1$

Per un campione di n piante si ottiene la v.e. Binomiale

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad \text{con distribuzione}$$

$$P(S_n=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0,1,2,\dots,n$$

e valore medio $E(S_n) = n \cdot p$

$$P(S_5 \geq 3) = \sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{5!}{3!2!} 0.1^3 0.9^2 + \frac{5!}{4!1!} 0.1^4 0.9^1 + \frac{5!}{5!0!} 0.1^5 0.9^0$$

$$= 10 \frac{81}{10^5} + 5 \frac{9}{10^5} + 1 \frac{1}{10^5}$$

$$= \frac{856}{10^5} = 0.00856$$

$$E(S_{10}) = 10 \cdot 0.1 = 1$$

6 Un'urna contiene 5 palle verdi e 4 palle rosse. Si estraggono due palle senza reinserimento (cioè prima una palla e poi un'altra senza reinserire la prima nell'urna). Sapendo che viene estratta almeno una palla verde, qual'è la probabilità che nella coppia di palle estratte l'altra sia rossa?

[punteggio 6]

Nell'estrazione senza reinserimento di due palle lo spazio degli eventi elementari è

$$\Omega = \{(V_1, V_2), (V_1, R_2), (R_1, V_2), (R_1, R_2)\}$$

dove $V_i = \{\text{esce una palla verde nell'estrazione } i=1,2\}$
 $R_i = \{\text{esce una palla rossa nell'estrazione } i=1,2\}$

Vogliamo calcolare la probabilità dell'evento

$$A = \{\text{esce una palla rossa}\} = \{(V_1, R_2), (R_1, V_2)\}$$

condizionato dall'evento

$$B = \{\text{esce almeno una palla verde}\} = \{(V_1, R_2), (R_1, V_2), (V_1, V_2)\}$$

Poiché $A \cap B = A$ si ha

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P((V_1, V_2)) = P(V_1 \cap V_2) = P(V_2|V_1)P(V_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

$$P((V_1, R_2)) = P(V_1 \cap R_2) = P(R_2|V_1)P(V_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

$$P((R_1, V_2)) = P(R_1 \cap V_2) = P(V_2|R_1)P(R_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{18}$$

$$P((R_1, R_2)) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3}{18}$$

$$\text{Quindi } P(A|B) = \frac{\frac{5}{18} + \frac{5}{18}}{\frac{5}{18} + \frac{5}{18} + \frac{5}{18}} = \frac{2}{3}$$

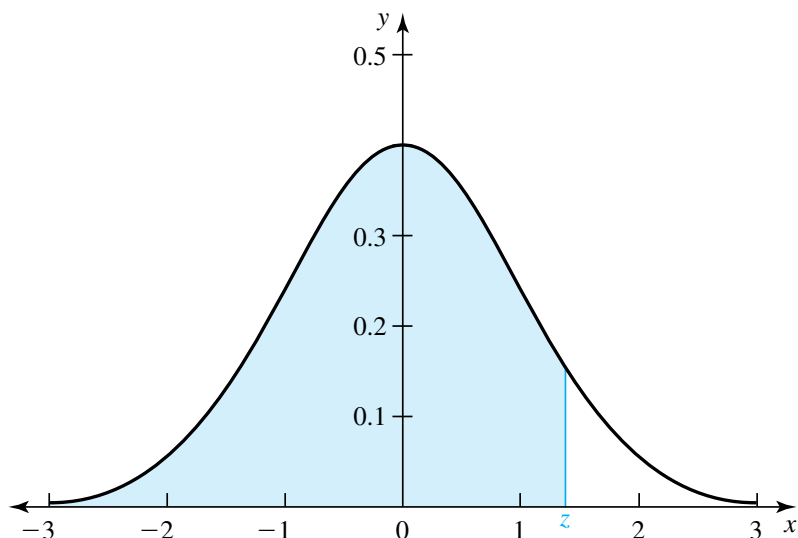


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z .

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986