CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2024/2025 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 16 giugno 2025

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				

1 Calcolare, giustificando ogni passaggio, il valore dei seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{8\ln(x^5+x^4+2)}{\ln(2-x^2+x^4)} \qquad b) \quad \lim_{x\to\infty} x^3 \tan\left(\frac{8}{x}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

[punteggio 6]

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{8\ln(x^5+x^4+2)}{\ln(2-x^2+x^4)} = \lim_{x\to\infty} 8\,\frac{\ln\left(x^5\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}\right)\right)}{\ln\left(x^4\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 8\,\frac{\ln x^5+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}\right)}{\ln x^4+\ln\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 8\,\frac{5\ln x}{4\ln x} = 8\,\frac{5}{4} = 10$$

b) $$\lim_{x\to\infty} x^3 \tan\left(\frac{8}{x}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} 8\,\frac{x}{8}\tan\left(\frac{8}{x}\right)\; x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

cambio di variabile

$$= \lim_{z\to 0} 8\,\frac{\tan z}{z} \cdot \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}$$

de l'Hopital

$$= \lim_{z\to 0} 8\,\frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{1} \cdot \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

2 Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x}{(x+2)^3}\, dx.$$

[punteggio 5]

La funzione integranda è razionale propria che decomponiamo come

$$\frac{x}{(x+2)^3} = \frac{A}{(x+2)^3} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A + B(x+2) + C(x+2)^2}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{A + 2B + 4C + (B+4C)x + Cx^2}{(x+2)^3}$$

$$\begin{cases} A + 2B + 4C = 0 \\ B + 4C = 1 \\ C = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 1 \\ A = -2 \end{cases}$$

Dunque

$$\int \frac{x}{(x+2)^3}\, dx = \int \frac{-2}{(x+2)^3}\, dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx$$

$$= (x+2)^{-2} - (x+2)^{-1} + \text{costante}$$

$$= \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)} + \text{costante}$$

$$= \frac{1-(x+2)}{(x+2)^2} + \text{costante}$$

$$= -\frac{x+1}{(x+2)^2} + \text{costante}$$

controllo: $\left(-\frac{x+1}{(x+2)^2}\right)' = -\frac{1}{(x+2)^2} + 2\frac{x+1}{(x+2)^3} = \frac{x}{(x+2)^3}$ ✓

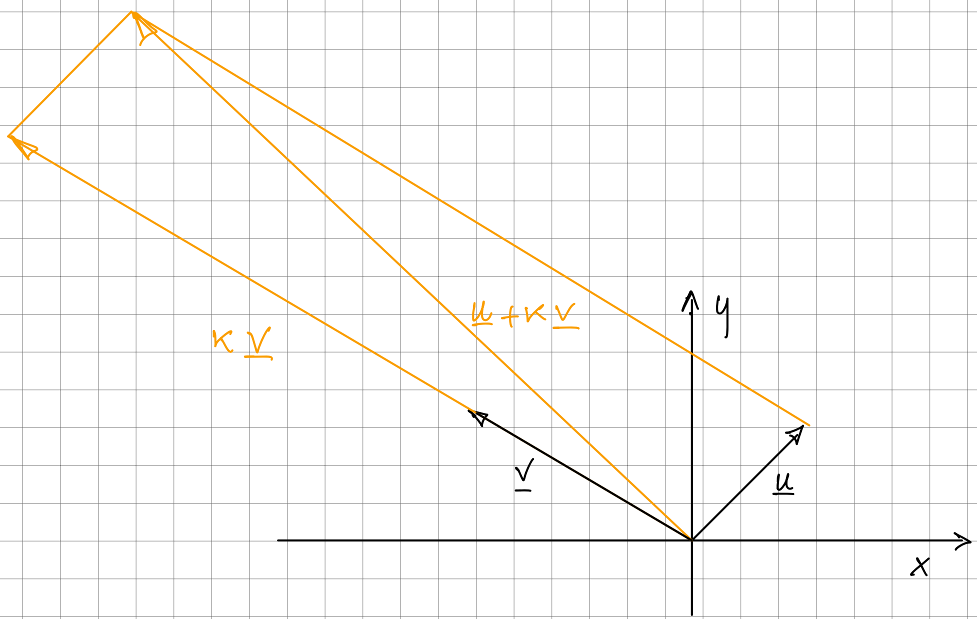
3 Siano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ due vettori in $\mathbb{R}^2$ tali che $|\boldsymbol{u}| = 2$ e $\boldsymbol{u}$ forma un angolo di $45°$ con l'asse x, $|\boldsymbol{v}| = 3$ e $\boldsymbol{v}$ forma un angolo di $150°$ con l'asse x. Determinare le componenti dei due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ e disegnarli. Determinare il valore dello scalare k tale che $\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ risulta ortogonale a $\boldsymbol{u}$.

[punteggio 6]

$$\underline{u} = \left(|\underline{u}| \cos(45°), |\underline{u}| \sin(45°)\right) = \left(2 \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$\underline{v} = \left(|\underline{v}| \cos(150°), |\underline{v}| \sin(150°)\right) = \left(-|\underline{v}| \cos(30°), |\underline{v}| \sin(30°)\right)$$

$$= \left(-3 \frac{\sqrt{3}}{2}, 3 \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$$



Si ha $\underline{u} + k\,\underline{v} \perp \underline{u}$ se e solo se $\langle \underline{u} + k\underline{v}, \underline{u} \rangle = 0$

$$\langle \underline{u} + k\underline{v}, \underline{u} \rangle = \left(u_x + k\, v_x\right) u_x + \left(u_y + k\, v_y\right) u_y$$

$$= \left(\sqrt{2} - k \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt{2} + \left(\sqrt{2} + k \frac{3}{2}\right)\sqrt{2}$$

$$= 2 - k \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2 + k \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$= 4 - k \frac{3}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

Quindi deve aversi $k \frac{3}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = 4$

$$k = \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{3} - 1\right)} \simeq 2.576$$

4 Sia $X = 1, 2, 3, \ldots$ una variabile aleatoria geometrica con valore di attesa 3. Calcolare $P(X > 5)$.

[punteggio 5]

La PMF (funzione di massa di probabilità) di X è

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \quad \text{con } 0<p\leq 1 \text{ e } k=1,2,3,\ldots$$

(X corrisponde al numero di realizzazioni di una variabile di Bernoulli fino alla prima realizzazione positiva)

Risulta $E(X) = \frac{1}{p}$ $\quad var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Poiché $E(X) = 3$ si ha $p = \frac{1}{3}$

$$P(X>5) = 1 - P(X \leq 5)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{5} (1-p)^{k-1} p \qquad \text{ponendo } k-1=n$$

$$= 1 - p \sum_{n=0}^{4} (1-p)^n$$

$$= 1 - p \, \frac{1-(1-p)^{4+1}}{1-(1-p)}$$

$$= 1 - p \, \frac{1-(1-p)^5}{p}$$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^5 \simeq 0.13$$

5 Un supermercato accetta pagamenti con carte di credito di due soli tipi A e B. Il 25% dei clienti possiede la carta A, il 50% la carta B, il 15% entrambe le carte. Calcolare:
a) la probabilità che un cliente scelto a caso possieda almeno una delle due carte accettate;
b) la probabilità che un cliente scelto a caso possieda solo una delle due carte accettate.
c) Se un cliente possiede almeno una carta accettata, qual'è la probabilità che possieda una carta di tipo A?

[punteggio 6]

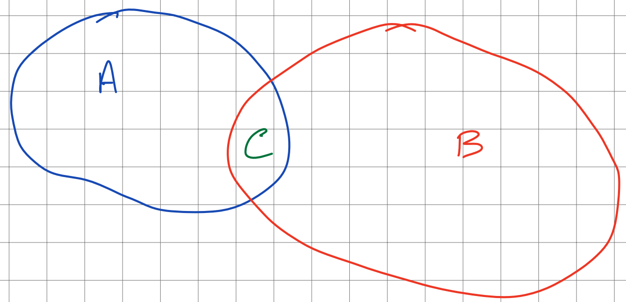
Consideriamo gli eventi non disgiunti

$A = \{$ possesso di carta $A\}$

$B = \{$ possesso di carta $B\}$

$C = \{$ possesso di A e $B\}$

$C = A \cap B$



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.25 + 0.50 - 0.15 = 0.60$

b) $P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= 0.25 + 0.50 - 0.30$

$= 0.45$

c) $$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{0.25}{0.60} = \frac{1}{2.4} \simeq 0.417$$

5 Un supermercato accetta pagamenti con carte di credito di due soli tipi A e B. Il 25% dei clienti possiede **solo** la carta A, il 50% **solo** la carta B, il 15% entrambe le carte. Calcolare:
a) la probabilità che un cliente scelto a caso possieda almeno una delle due carte accettate;
b) la probabilità che un cliente scelto a caso possieda solo una delle due carte accettate.
c) Se un cliente possiede almeno una carta accettata, qual'è la probabilità che possieda una carta di tipo A?

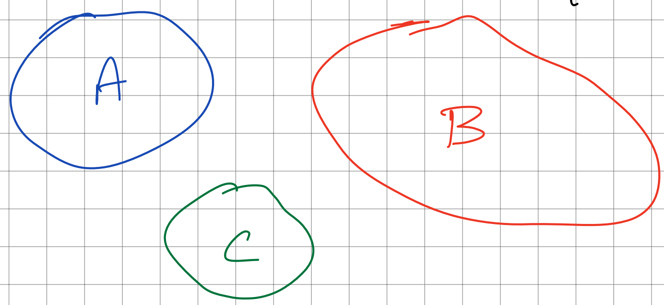
[punteggio 6]

Consideriamo gli eventi disgiunti

$A = \{ \text{possesso di sola carta } A \}$

$B = \{ \text{possesso di sola carta } B \}$

$C = \{ \text{possesso di entrambe le carte} \}$



a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$= 0.25 + 0.50 + 0.15 = 0.90$

il 90% dei clienti possiede almeno una delle due carte.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= 0.25 + 0.50 = 0.75$

il 75% dei clienti possiede o solo la carta A o solo la B

c) Dobbiamo calcolare la probabilità condizionata

$$P(A \mid A \cup B \cup C) = \frac{P(A \cap (A \cup B \cup C))}{P(A \cup B \cup C)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B \cup C)}$$

$$= \frac{0.25}{0.90} = \frac{1}{3.6} \simeq 0.28$$

6 Il peso dei pesci di un allevamento ittico può essere considerato una variabile aleatoria normale. Il peso medio è 600 g e il 7% dei pesci ha un peso maggiore di 800 g. Quale percentuale di pesci pesa meno di 200 g?

[punteggio 5]

Detta X la variabile aleatoria peso di un pesce si ha $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 600\,g$ e σ incognita.

Ricaviamo σ dall'informazione $P(X > 800) = 0.07$

Passando alla v. a. normale standard $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$P(X > 800) = P\left(Z > \frac{800-600}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{200}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - F\left(\frac{200}{\sigma}\right)$$

Dunque $F\left(\frac{200}{\sigma}\right) = 1 - 0.07 = 0.93$

e dalle tabelle di $F(z)$ otteniamo $z \simeq 1.48$

da cui $\sigma = \frac{200}{1.48} \simeq 135$

Possiamo ora determinare $P(X < 200)$. Abbiamo

$$P(X < 200) = P\left(Z < \frac{200-600}{135}\right) = P(Z < -2.96)$$

$$= P(Z > 2.96) = 1 - P(Z < 2.96)$$

$$= 1 - 0.9985$$

$$= 0.0015$$

Solo lo 0.15% dei pesci pesa meno di 200 g.

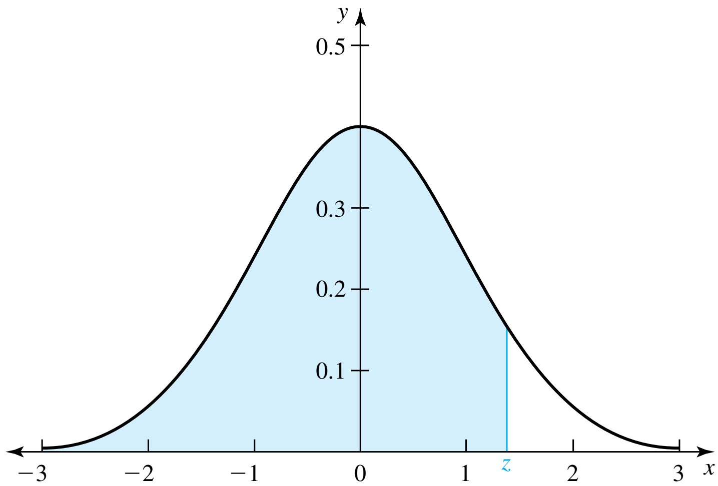


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z.

z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986