

CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2024/2025 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 17 febbraio 2025

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				
----------	--	--	--	--

- 1 Si consideri la successione, definita ricorsivamente, $a_{n+1} = 2a_n(1-a_n)$. Determinare i suoi punti fissi. Sapendo che la successione è convergente, calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nei casi: a) $a_0 = 0$; b) $a_0 = 1$; c) $a_0 = 1/2$; d) $a_0 = 1/3$.

[punteggio 5]

L'equazione per i punti fissi è $a = 2a(1-a)$
 $2a^2 - a = 0$ che fornisce $a = 0$ e $a = 1/2$
 Poiché la successione $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ è convergente deve
 risultare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oppure $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$

a) se $a_0 = 0$ si ha $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ... $a_n = 0$
 quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

b) se $a_0 = 1$ si ha $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ... $a_n = 0$
 quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

c) se $a_0 = 1/2$ si ha $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/2$, ... $a_n = 1/2$
 quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$

d) se $a_0 = 1/3$ si ha $a_1 = \frac{4}{9} = \frac{(3^2-1)/2}{3^2}$,
 $a_2 = \frac{40}{81} = \frac{(3^4-1)/2}{3^4}$, $a_3 = \frac{80}{81} \cdot \frac{41}{81} = \frac{(3^8-1)/2}{3^8}$,
 $a_4 = \frac{(3^{16}-1)/2}{3^{16}}$, ... $a_n = \frac{(3^{2^n}-1)/2}{3^{2^n}}$
 quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right) = \frac{1}{2}$

2 Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx.$$

[punteggio 6]

La funzione integranda è una funzione razionale propria che può essere scritta come

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \frac{Ax^2 + A4 + Bx^2 + Cx}{x^3 + 4x}$$

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ -1 = C \\ 4 = 4A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C = -1 \\ B = 1 \end{cases} \quad \text{Per tanto}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x-1}{x^2+4} dx \\ &= \ln|x| + \int \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln|x^2+4| - \frac{1}{x^2+4} \right) dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} d\frac{x}{2} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

3 Una popolazione $N(t)$ varia nel tempo in base alle fluttuazioni stagionali periodiche delle risorse a disposizione. Un semplice modello di evoluzione per $N(t)$ è

$$N'(t) = [R + r \cos(\omega t)]N(t), \quad r > 0,$$

dove $2\pi/\omega$ è il periodo di fluttuazione. Supponendo che $N(0) = N_0$, si determini $N(t)$. Valutare il limite di $N(t)$ per $t \rightarrow \infty$ nei tre casi $R = 0, 1, -1$.

[punteggio 6]

L'equazione differenziale da determinare N è a variabili separabili

$$\frac{dN(u)}{N(u)} = [R + r \cos(\omega u)] du$$

e integrata tra $u=0$ e $u=t$ fornisce

$$\ln \left(\frac{N(t)}{N(0)} \right) = \left(R u + \frac{r}{\omega} \sin(\omega u) \right) \Big|_0^t = R t + \frac{r}{\omega} \sin(\omega t)$$

si noti che $N(t), N(0) > 0$ quindi $\ln \left| \frac{N(t)}{N(0)} \right| = \ln \frac{N(t)}{N(0)}$

Esponenziando abbiamo $N(t) = N_0 e^{R t + \frac{r}{\omega} \sin(\omega t)}$

dove si è posto $N(0) = N_0$

Se $R=0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N_0 e^{\frac{r}{\omega} \sin(\omega t)}$ non esiste

in quanto la funzione oscilla tra $N_0 e^{-\frac{r}{\omega}}$ e $N_0 e^{\frac{r}{\omega}}$

Se $R=1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(N_0 e^{\frac{r}{\omega} \sin(\omega t)} \right) e^t = \infty$

in quanto $N_0 e^{\frac{r}{\omega} \sin(\omega t)} e^t \geq N_0 e^{-\frac{r}{\omega}} e^t \rightarrow \infty$

Se $R=-1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(N_0 e^{\frac{r}{\omega} \sin(\omega t)} \right) e^{-t} = 0$

in quanto $0 \leq N_0 e^{\frac{r}{\omega} \sin(\omega t)} e^{-t} \leq N_0 e^{\frac{r}{\omega}} e^{-t} \rightarrow 0$

4 Si estraggono a caso 4 carte da un mazzo di carte francesi (52 carte con 4 semi e 13 valori per seme). Qual'è la probabilità di: a) estrarre esattamente 1 asso? b) estrarre almeno 1 asso?

[punteggio 5]

a) Si consideri l'evento

$$A = \{ 4 \text{ carte estratte con 1 asso e 3 carte non assi} \}$$

dello spazio campionario

$$\Omega = \{ 4 \text{ carte estratte} \}$$

$$\text{Risulta } |A| = \binom{4}{1} \binom{48}{3} \quad |\Omega| = \binom{52}{4}$$

$$\text{dunque } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{3}}{\binom{52}{4}} = \frac{69184}{270725} \approx 0.255$$

b) Si consideri l'evento

$$B = \{ 4 \text{ carte estratte di cui almeno una è un asso} \}$$

e il suo complementare

$$B^c = \{ 4 \text{ carte estratte di cui nessuna è un asso} \}$$

$$\text{Risulta } |B^c| = \binom{4}{0} \binom{48}{4} = \binom{48}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{dunque } P(B) &= 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{48}{4}}{\binom{52}{4}} \\ &= 1 - \frac{38916}{270725} \approx 1 - 0.719 \approx 0.281 \end{aligned}$$

Si osserva che

$$\begin{aligned} |B^c| + |B| &= \binom{4}{0} \binom{48}{4} + \left[\binom{4}{1} \binom{48}{3} + \binom{4}{2} \binom{48}{2} + \binom{4}{3} \binom{48}{1} + \binom{4}{4} \binom{48}{0} \right] \\ &= |\Omega| \end{aligned}$$

5 Un vaccino produce effetti collaterali in 1 individuo su 1000. Se indichiamo con X la variabile aleatoria numero di individui che hanno effetti collaterali in seguito alla somministrazione del vaccino, determinare: a) il tipo di distribuzione seguita da X ; b) la probabilità che in un gruppo di 500 individui nessuno presenti effetti collaterali; c) la probabilità che in un gruppo di 200 individui almeno 1 persona presenti effetti collaterali; d) il numero medio e la deviazione standard del numero di individui con effetti collaterali in un gruppo di 100

[punteggio 6]

a) X è una v.e. discreta con distribuzione binomiale in un campione con n individui e detta $p = 1/1000$ la probabilità che un individuo abbia effetti collaterali

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0,1,2,\dots,n$$

b) Per $n=500$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{500}{0} p^0 (1-p)^{500-0} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0.999^{500} \approx 0.606 \end{aligned}$$

c) Per $n=200$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.999^{200} \approx 0.181 \end{aligned}$$

d) Per una distribuzione binomiale si ha

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad \text{var}(X) = np(1-p) \quad \text{per} \quad n=1000$$

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{1000} = 0.1$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 0.999} = \sqrt{0.0999} \approx 0.316$$

Data la grandezza dei campioni in gioco, è accettabile anche affermare che X è una v.a. con distribuzione di Poisson $P(X=k) = \exp(-q) q^k / k!$, $k=0,1,2,\dots$, con $q=E(X)=\text{var}(X)$

a) per $n=500$ $q=500/1000=1/2$ quindi $P(X=0)=\exp(-1/2)$

b) per $n=200$ $q=200/1000=1/5$ quindi $P(X>0)=1-\exp(-1/5)$

c) per $n=100$ $E(X)=q=100/1000=0.1$ e $\sigma=\sqrt{\text{var}(X)}=\sqrt{0.1}$

6 L'altezza di una popolazione può essere considerata una variabile aleatoria normale. L'altezza media è 165 cm e il 5.48% della popolazione ha altezza minore di 158 cm. Quale percentuale di popolazione è più alta di 174 cm?

[punteggio 5]

Si ha $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 165$ cm e σ incognita

Possiamo ricavare σ dall'informazione $P(X < 158) = 0.0548$

Passiamo alla v.a. normale standard $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ed ha

$$\begin{aligned} P(X < 158) &= P\left(Z < \frac{158 - 165}{\sigma}\right) = P\left(Z < -\frac{7}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{7}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{7}{\sigma}\right) \\ &= 1 - F\left(\frac{7}{\sigma}\right) = 0.0548 \end{aligned}$$

$$\text{Dunque } F\left(\frac{7}{\sigma}\right) = 1 - 0.0548 = 0.9452$$

e dalle tabelle di $F(z)$ ricaviamo $\frac{7}{\sigma} \approx 1.6$

$$\text{da cui } \sigma = \frac{7}{1.6} = 4.375$$

Possiamo quindi trovare $P(X > 174)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X > 174) &= P\left(Z > \frac{174 - 165}{4.375}\right) = P\left(Z > \frac{9}{4.375}\right) \\ &\approx P(Z > 2.057) = 1 - P(Z \leq 2.057) \\ &= 1 - F(2.057) \approx 1 - 0.98 = 0.02 \end{aligned}$$

Concludiamo che il 2% della popolazione ha, probabilmente, altezza maggiore di 174 cm.

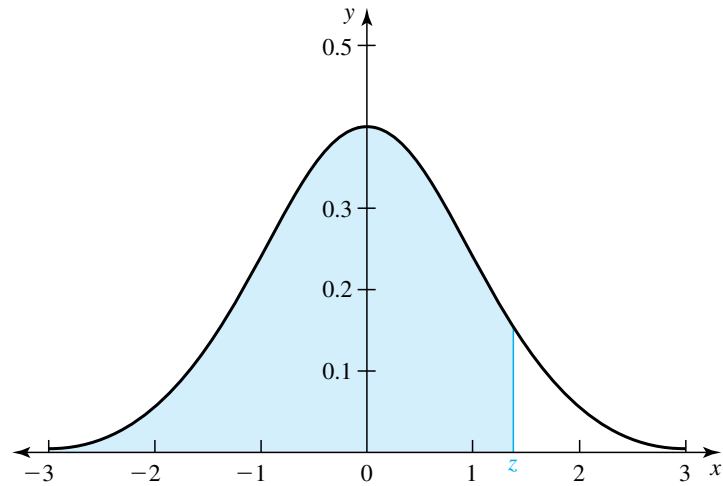


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z .

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986