CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2023/2024 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 18 giugno 2024

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				

1 Calcolare l'area compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y(x) = (x^2 - 16)/(x + 5)$ tra gli zeri di quest'ultima.

[punteggio 5]

Gli zeri di $y(x)$ sono dati da $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$

e per $-4 < x < 4$ risulta $y(x) < 0$.

$$\text{Area} = \int_{-4}^{4} \left(0 - y(x)\right) dx = -\int_{-4}^{4} \frac{x^2 - 16}{x+5}\, dx$$

Riduciamo la funzione integranda a una frazione propria più un polinomio

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -16 & x+5 \\ x^2 + 5x & & x-5 \\ \hline & -5x - 16 & \\ & -5x - 25 & \\ \hline & 9 & \end{array}$$

$$x^2 - 16 = (x+5)(x-5) + 9$$

$$\text{Area} = -\int_{-4}^{4} \left(x - 5 + \frac{9}{x+5}\right) dx$$

$$= -\left(\frac{1}{2}(x-5)^2 \Big|_{-4}^{4} + 9 \ln|x+5| \Big|_{-4}^{4} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left((-1)^2 - (-9)^2\right) - 9\left(\ln|9| - \ln|1|\right)$$

$$= 40 - 9 \ln 9$$

2 Una popolazione animale cresce nel tempo seguendo la legge

$$N(t) = \frac{100}{1 + 10e^{-t}}, \qquad t \geq 0.$$

Qual'è il numero di individui per tempi lunghi? Qual'è l'istante di tempo in cui la popolazione cresce più velocemente? Tracciare l'andamento qualitativo di $N(t)$.

[punteggio 6]

Numero di individui per $t \to \infty$ $= \lim_{t \to \infty} N(t) = 100$

Velocità di crescita $= N'(t) = -\frac{100}{(1+10e^{-t})^2}(-10e^{-t})$

$$= \frac{1000\,e^{-t}}{(1+10e^{-t})^2}$$

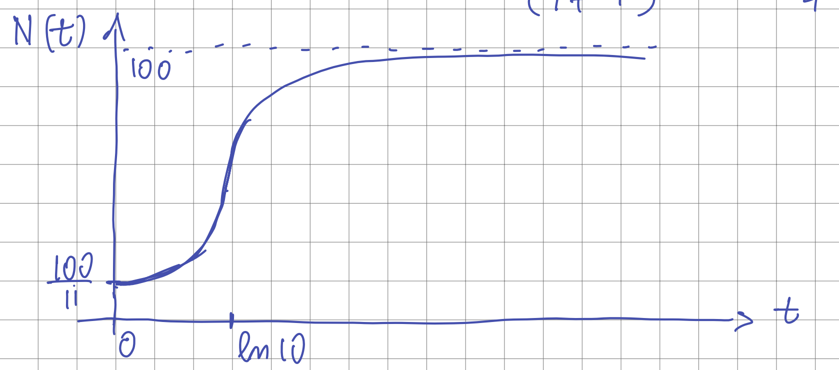
Per trovare il max di $N'(t)$ studiamo $N''(t)$

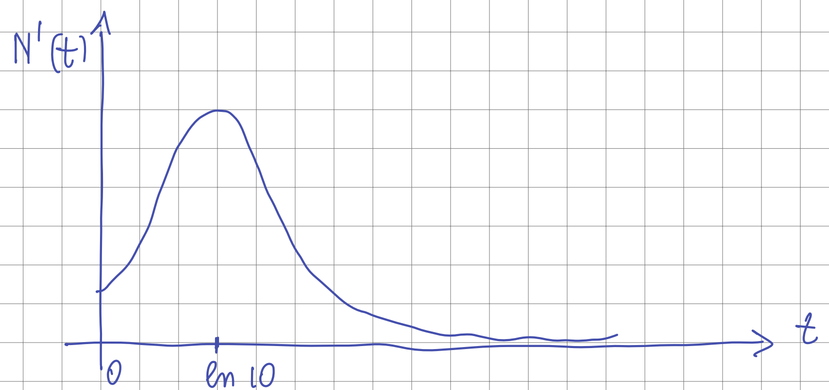
$$N''(t) = \frac{-1000e^{-t}(1+10e^{-t})^2 + 1000e^{-t}\,2(1+10e^{-t})}{(1+10e^{-t})^4}$$

$$= \frac{1000\,e^{-t} - 10000\,e^{-2t}}{(1+10e^{-t})^3} = \frac{1000e^{-t}(1-10e^{-t})}{(1+10e^{-t})^3}$$

$N''(t) = 0 \Rightarrow 1 - 10e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{t} = 10 \Rightarrow t = \ln 10$

$\max N'(t) = N'(\ln 10) = \frac{1000 \cdot 10^{-1}}{(1+1)^2} = \frac{100}{4} = 25$





3 Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x) + \sin(2\pi x)y(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad y(0) = y_0 \neq 0.$$

[punteggio 6]

$\frac{dy(x)}{dx} = \left[1 + \sin(2\pi x)\right] y(x)$ equazione a variabili separabili. Assumendo $y(x) \neq 0$ abbiamo infatti

$$\frac{dy}{y} = \left[1 + \sin(2\pi x)\right] dx$$

che integrata dà

$$\ln|y(x)| = x - \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x) + C_1$$

Esponenziando

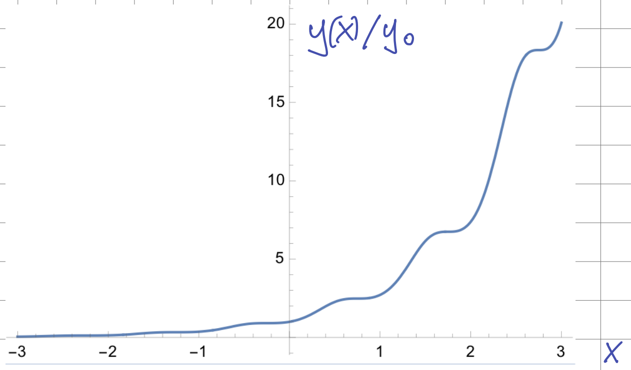
$$|y(x)| = e^{C_1}\, e^{x - \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)}$$

$$y(x) = C\, e^{x - \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)} \qquad C \equiv \pm e^{C_1} \neq 0$$

Imponendo $y(0) = y_0$ troviamo $C\, e^{-\frac{1}{2\pi}} = y_0$

$$y(x) = y_0\, e^{x + \frac{1}{2\pi}\left(1 - \cos(2\pi x)\right)}$$

Nota che $y(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ come assunto.



4 Una prova d'esame consiste in 5 domande a risposta multipla: per ogni domanda sono possibili 4 risposte di cui 1 sola è corretta. Vengono assegnati 6 punti per ogni risposta corretta e 0 punti per ogni risposta sbagliata. L'esame si intende superato se il punteggio totale è almeno 18. Se uno studente decide di ripondere a caso, che probabilità ha di superare l'esame?

[punteggio 6]

Probabilità di risposta corretta a una domanda $= p = \frac{1}{4}$

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di risposte corrette $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5 = n$

X ha distribuzione binomiale con probabilità

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad n = 5 \quad p = \frac{1}{4}$$

L'esame è superato se $X \geq 3$ $(\text{voto} \geq 6 \cdot 3 = 18)$

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$= 10 \frac{9}{4^5} + 5 \frac{3}{4^5} + 1 \frac{1}{4^5}$$

$$= \frac{90 + 15 + 1}{1024}$$

$$= \frac{106}{1024}$$

$$= \frac{53}{512} \simeq 0.10$$

5 Un test per l'assunzione di droga è accurato al 98% in caso di risultato positivo e accurato al 90% in caso di risultato negativo. Se il 10% di un gruppo di persone fa uso di droga, qual'è la probabilità che una di queste persone risultata positiva al test abbia effettivamente assunto droga?

[punteggio 5]

Consideriamo i seguenti eventi

$A = \{$ c'è stata assunzione di droga $\}$

$N = \{$ non c'è sta assunzione di droga $\}$

$T^\pm = \{$ risultato del test positivo / negativo $\}$

Sappiamo che

$P(T^+ \mid A) = 0.98$

$P(T^- \mid N) = 0.90$

$P(A) = 0.1$

Dobbiamo calcolare $P(A \mid T^+)$.

Usando la formula di Bayes abbiamo

$$P(A \mid T^+) = P(T^+ \mid A) \frac{P(A)}{P(T^+)}$$

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+ \mid A)\, P(A) + P(T^+ \mid N)\, P(N) \\ &= P(T^+ \mid A)\, P(A) + \left[1 - P(T^- \mid N)\right]\left[1 - P(A)\right] \\ &= 0.98 \; 0.1 + (1 - 0.90)(1 - 0.1) \\ &= 0.098 + 0.090 = 0.188 \end{aligned}$$

Concludiamo

$$P(A \mid T^+) = 0.98 \frac{0.1}{0.188} \simeq 0.52$$

6 In Italia si sono registrati 1000 eventi atmosferici estremi negli ultimi 10 anni. Supponendo che il numero di questi eventi sia una variabile aleatoria di Poisson, determinare la probabilità
a) che ci siano almeno due eventi estremi in un mese;
b) che non ce ne sia nessuno in una settimana.

[punteggio 5]

Sia X la variabile aleatoria di Poisson che conta il numero di eventi in un intervallo di tempo T. Detto λ il numero medio di eventi nell'intervallo T la probabilità di essere k eventi in T è data da

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$$

a) Se $T = 1$ mese $\quad \lambda = \frac{1000}{10 \cdot 12} \simeq 8.33$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right)$$
$$= 1 - \left(e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}\right)$$
$$= 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda)$$
$$\simeq 1 - 9.33\, e^{-8.33} \simeq 0.998$$

b) Se $T = 1$ settimana $\quad \lambda = \frac{1000}{10 \cdot 52} \simeq 1.923$

$$P(X=0) = e^{-\lambda} \simeq e^{-1.923} \simeq 0.14$$

Table of the Standard Normal Distribution

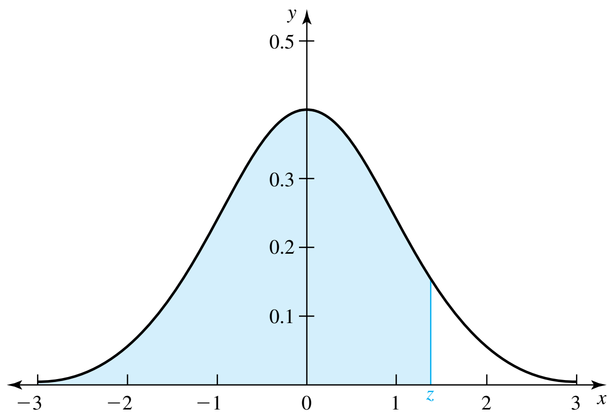


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z.

z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986