CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2023/2024 – Prof. C. Presilla

Prova A5 – 23 settembre 2024

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				

1 Calcolare $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x$.

[punteggio 5]

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x = \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - x$$

$$= x\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} - x$$

$$= x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

$$= x\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \frac{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3} - 1}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\exists \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2$$

Usando de l'Hopital (forma indeterminata 0/0)

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3} - 1}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{-2/3}\cancel{\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{-2/3} = \frac{1}{3}$$

Quindi $\exists \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2 Studiare la seguente funzione e disegnarne l'andamento nel dominio di esistenza

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}.$$

Calcolare poi l'area compresa tra la curva $y(x)$ e l'asse x.

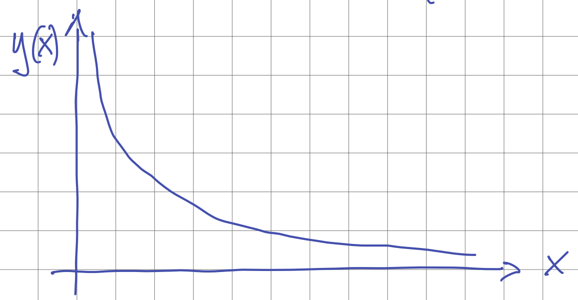
[punteggio 6]

Il dominio di esistenza di $y(x)$ è $D = (0, \infty)$

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} y(x) = \infty$

$$y'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2} e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2} x^{-1/2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) < 0 \quad \forall x \in D$$



Dunque $y(x)$ decresce monotonamente in D

$y(x)$ ha primitiva $Y'(x) = y(x)$ data da $Y(x) = -2e^{-\sqrt{x}}$

quindi

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx = \lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \int_a^b y(x)\,dx$$

$$= \lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \left(Y(b) - Y(a)\right)$$

$$= 0 - (-2)$$

$$= 2$$

3 Determinare gli autovalori di $(A^2)^{-1}$, dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

[punteggio 6]

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\,A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A^2 = \frac{1}{9^2}(25-16) = \frac{1}{9} \quad (\neq 0 \Rightarrow A^2 \text{ invertibile})$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{9}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori λ di $(A^2)^{-1}$ sono le soluzioni di

$$\det\left((A^2)^{-1} - \lambda \mathbb{1}\right) = 0$$

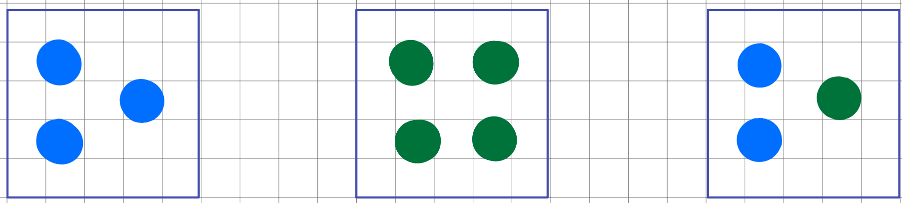
$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 - (-4)^2 = 0$$

$$5 - \lambda = \pm 4$$

$$\lambda = 5 \mp 4 = \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

4 Tre scatole contengono delle biglie di colori diversi. La prima scatola contiene 3 biglie blu, la seconda 4 biglie verdi, la terza 2 biglie blu e 1 biglia verde. A caso, si prende una delle scatole e si estrae una biglia. Determinare la probabilità che la biglia estratta sia blu.

[punteggio 6]



Ogni scatola può essere scelta con probabilità $\frac{1}{3}$
All'interno di ogni scatola ogni biglia ha la stessa probabilità di essere estratta delle altre.
Si tratta di eventi indipendenti, quindi

$$P = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

5 In un paese di 3000 abitanti, 2400 hanno i capelli neri, 1500 hanno gli occhi neri, e 500 sono più alti di 170 cm. Si sa inoltre che 1400 abitanti hanno sia i capelli che gli occhi neri, che 250 abitanti hanno gli occhi neri e sono più alti di 170 cm, e che un abitante su sei, fra quelli che hanno i capelli neri, è alto più di 170 cm. Determinare quali delle seguenti coppie di caratteri sono indipendenti e quali no.

1) occhi neri e altezza maggiore di 170 cm,
2) capelli neri e altezza maggiore di 170 cm,
3) occhi neri e altezza minore o uguale a 170 cm,
4) occhi neri e capelli neri.

[punteggio 5]

Definiamo i seguenti eventi:

$C = \{\text{capelli neri}\}$ $O = \{\text{occhi neri}\}$ $A = \{\text{altezza} > 170 \text{ cm}\}$

$A^c = \{\text{altezza} \leq 170 \text{ cm}\}$

Sappiamo che:

$P(C) = \frac{2400}{3000} = \frac{4}{5}$ $P(O) = \frac{1500}{3000} = \frac{1}{2}$ $P(A) = \frac{500}{3000} = \frac{1}{6}$

Sappiamo inoltre che:

$P(C \cap O) = \frac{1400}{3000} = \frac{7}{15}$

$P(O \cap A) = \frac{250}{3000} = \frac{1}{12} \Rightarrow P(O \cap A^c) = P(O) - P(O \cap A) = \frac{5}{12}$

$P(A|C) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap C) = P(A|C)\,P(C) = \frac{2}{15}$

X e Y sono eventi indipendenti $\iff P(X)\,P(Y) = P(X \cap Y)$

1) $P(O) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(O \cap A)$ O e A indipendenti

2) $P(C) \cdot P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{15} = P(C \cap A)$ C e A indipendenti

3) $P(O) \cdot P(A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} = P(O \cap A^c)$ O e A^c indipendenti

4) $P(O) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \neq P(O \cap C)$ O e C dipendenti

6 Un apparecchio dosatore riempe delle provette da 10 cl. Assumendo che la quantità di liquido X versata dal dosatore in una provetta sia una variabile aleatoria normale di media $\mu = 9.99$ cl e deviazione standard $\sigma = 0.012$ cl, determinare la percentuale di provette fatte traboccare dall'apparecchio. Il 10% delle provette viene riempito con q cl di liquido. Determinare il valore di q.

[punteggio 5]

Abbiamo $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 9.99$ cl e $\sigma = 0.012$ cl

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$$

Detta $Z \sim N(0,1)$ $\quad Z = (X - \mu)/\sigma$

$$P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10 - 9.99}{0.012}\right) = P(Z \leq 0.833) = 0.797$$

Concludiamo $P(X > 10) = 1 - 0.797 = 20.3\%$

Dobbiamo determinare q dalla relazione

$$P(X < q) = 0.10$$

Esprimendo di nuovo X in termini della v.a. normale standard $Z = (X - \mu)/\sigma$, ciò equivale a dire

$$P\left(Z < \frac{q - 9.99}{0.012}\right) = 0.10$$

ovvero $$P\left(Z > \frac{-q + 9.99}{0.012}\right) = 0.10$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{-q + 9.99}{0.012}\right) = 0.10$$

quindi in ultima analisi $P\left(Z \leq \frac{-q + 9.99}{0.012}\right) = 0.90$

Dalla tabella della CDF di Z abbiamo

$$\frac{-q + 9.99}{0.012} = 1.28 \Rightarrow q = -1.28\ 0.012 + 9.99 = 9.97$$

$$q = 9.97 \text{ cl.}$$

Table of the Standard Normal Distribution

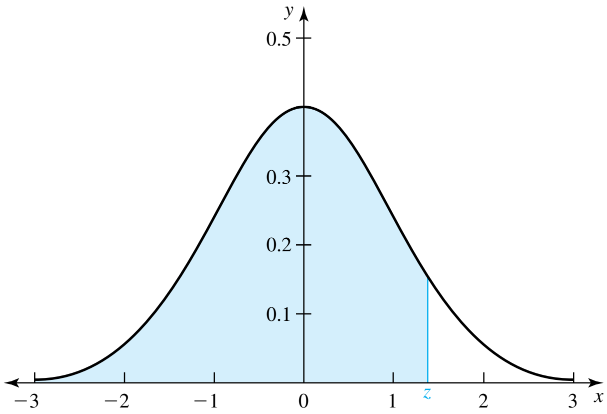


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z.

z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986