CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2024/2025 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 29 gennaio 2025

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				

1 Calcolare i seguenti limiti, se esistono, o dimostrare la loro non esistenza.

a) $\lim_{x\to-\infty} e^x(\sin x)^2$, b) $\lim_{x\to+\infty} e^x(\sin x)^2$.

[punteggio 5]

a) Poiché $0 \le (\sin x)^2 \le 1$ si ha $0 \le e^x (\sin x)^2 \le e^x$

Inoltre $\lim_{x\to-\infty} e^{+x} = 0$ quindi

$\lim_{x\to-\infty} e^x (\sin x)^2 = 0$ per il teorema del confronto

b) Si considerino le due successioni

$a_n = 2\pi n$ $b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n}(\sin a_n)^2 = \lim_{n\to\infty} e^{2\pi n}\, 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{b_n}(\sin b_n)^2 = \lim_{n\to\infty} e^{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\, 1 = \infty$$

Segue che $\lim_{x\to\infty} e^x (\sin x)^2$ non esiste

2 La concentrazione di un farmaco nel sangue varia nel tempo con legge

$$c(t) = k\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)$$

con $\beta > \alpha > 0$ e $k > 0$ parametri fissati. Determinare in funzione dei parametri: a) l'istante di massima concentrazione e il valore di massima concentrazione; b) gli istanti in cui la concentrazione ha velocità di crescita massima e minima. c) Fare un grafico qualitativo di $c(t)$.

[punteggio 5]

Per $t \geq 0$ si ha $e^{-\alpha t} > e^{-\beta t}$ in quanto $\beta > \alpha > 0$ e quindi, essendo $k > 0$, risulta $c(t) \geq 0$

Per $t = 0$ si ha $c(0) = 0$ e $\lim_{t \to \infty} c(t) = 0$

$$c'(t) = k\left(-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}\right)$$

$$c'(t_0) = 0 \Rightarrow \beta e^{-\beta t_0} = \alpha e^{-\alpha t_0} \qquad \frac{\beta}{\alpha} = e^{(\beta-\alpha)t_0}$$

$$\ln\frac{\beta}{\alpha} = (\beta-\alpha)t_0 \qquad t_0 = \frac{1}{\beta-\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

$$c(t_0) = k\left(e^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha}} - e^{-\frac{\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

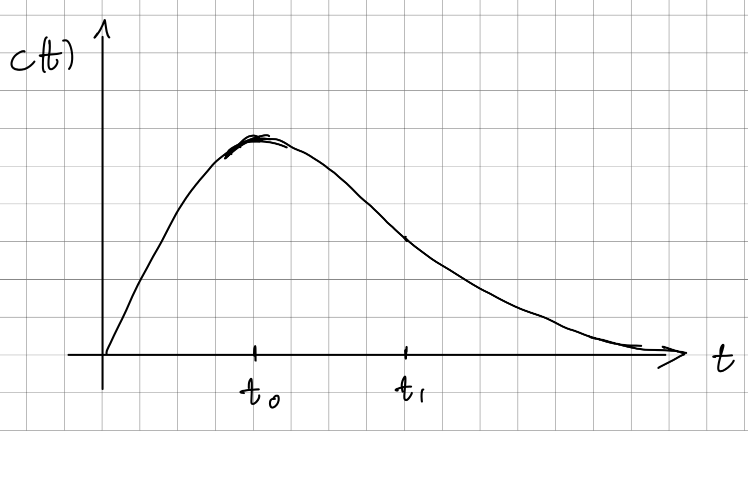
$$= k\left(e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} - e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}\right) = k\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\right)$$

Evidentemente in t_0 si ha il max globale, in $t=0$ il min globale

$$c''(t) = k\left(\alpha^2 e^{-\alpha t} - \beta^2 e^{-\beta t}\right)$$

$$c''(t_1) = 0 \Rightarrow \beta^2 e^{-\beta t_1} = \alpha^2 e^{-\alpha t_1} \qquad t_1 = \frac{2}{\beta-\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Poiché $c''(t) < 0$ per $t < t_1$ e $c''(t) > 0$ per $t > t_1$, in t_1 si ha un min per $c'(t)$. Il max di $c'(t)$ è ottenuto per $t = 0$



3 Calcolare i seguenti integrali (assumendo che log sia il logaritmo naturale)

a) $\int x^2 \log x dx$ b) $\int \frac{1}{x(1+(\log x)^2)} dx$ c) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx$

[punteggio 6]

a) integrando per parti si ha

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C$$

b) ponendo $\log x = u$ e quindi $\frac{dx}{x} = du$ si ha

$$\int \frac{1}{x\left(1+(\log x)^2\right)} dx = \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u + C$$

c) osservando che $x+1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left(x^2+2x+4\right)$ si ha

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+2x+4} \frac{d}{dx}\left(x^2+2x+4\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \log\left|x^2+2x+4\right| + C$$

4 Un test diagnostico per l'ipertiroidismo mostra un risultato positivo nel 92% dei casi in cui la malattia è effettivamente presente e nel 7% dei casi in cui la malattia non è presente (falsi positivi). La malattia si manifesta in 1 individuo su 600. Se il test viene somministrato a un individuo scelto a caso, qual'è la probabilità che risulti positivo?

[punteggio 5]

Definiamo i seguenti eventi riferiti a un individuo

$T_+ = \{\text{test positivo}\}$ $\qquad$ $T_- = \{\text{test negativo}\}$

$M = \{\text{malato}\}$ $\qquad$ $S = \{\text{sano}\}$

Dobbiamo calcolare $P(T_+) = P(T_+ \cap M) + P(T_+ \cap S)$

Sappiamo che

$$P(T_+ | M) = 92/100$$
$$P(T_+ | S) = 7/100$$
$$P(M) = 1/600$$

Quindi

$$P(T_+ \cap M) = P(T_+ | M)\, P(M) = \frac{92}{100}\,\frac{1}{600}$$

$$P(T_- \cap S) = P(T_- | S)\, P(S) = \frac{7}{100}\,\frac{599}{600}$$

Concludiamo che

$$P(T_+) = \frac{92}{100}\,\frac{1}{600} + \frac{7}{100}\,\frac{599}{600} \simeq 7.14\,\%$$

5 Il numero medio di chiamate telefoniche che arrivano a un centralino in un minuto è 2.5. Supponendo di poter approssimare il numero di chiamate al minuto mediante una variabile aletoria con distribuzione di Poisson, determinare la probabilità che in un minuto arrivino: a) 0 chiamate; b) 2 chiamate; c) al più 4 chiamate.

[punteggio 6]

Sia N la variabile aleatoria discreta numero di chiamate al minuto. Poiché N segue la distribuzione di Poisson

$$P(N=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con } \lambda = E(N) = 2.5$$

a) $$P(N=0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-2.5} \simeq 0.082$$

b) $$P(N=2) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = e^{-2.5}\frac{2.5^2}{2} = e^{-2.5}\frac{6.25}{2} \simeq 0.256$$

c) $$P(N\leq 4) = \sum_{k=0}^{4} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6}+\frac{\lambda^4}{24}\right)$$

$$= e^{-2.5}\left(1+2.5+\frac{2.5^2}{2}+\frac{2.5^3}{6}+\frac{2.5^4}{24}\right)$$

$$\simeq 0.89$$

6 Il peso del caffè contenuto in pacchetti da 250 g confezionati in modo automatico è una variabile aleatoria normale con media $\mu = 250$ g e deviazione standard $\sigma = 3$ g. Si calcoli la probabilità che un pacchetto abbia un peso: a) minore di 245 g; b) compreso tra 247 g e 253 g. c) Determinare il peso q tale che solo il 5% dei pacchetti ha peso superiore.

[punteggio 6]

---

a) Posto $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $\quad Z \sim N(0,1)$ si ha

$$P(X < 245) = P\left(Z < \frac{245-250}{3}\right) = P(Z < -1.666)$$
$$= P(Z > 1.666) = 1 - P(Z \leq 1.666)$$
$$= 1 - F(1.666) \simeq 1 - F(1.67)$$
$$\simeq 1 - 0.9525 \simeq 0.0475$$

b) $P(247 \leq X \leq 253) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0.68$

per la regola 68-95-99

c) Dobbiamo risolvere l'equazione in q

$P(X > q) = 0.05$

che è equivalente a

$P\left(Z > \frac{q-250}{3}\right) = 0.05$

ovvero $\quad P\left(Z \leq \frac{q-250}{3}\right) = F\left(\frac{q-250}{3}\right) = 0.95$

Dalla tabella di $F(z)$ troviamo che $F(z) \simeq 0.95$ per

$z = 1.645$ quindi

$\frac{q-250}{3} = 1.645$

$q = 250 + 1.645 \cdot 3 = 254.935$

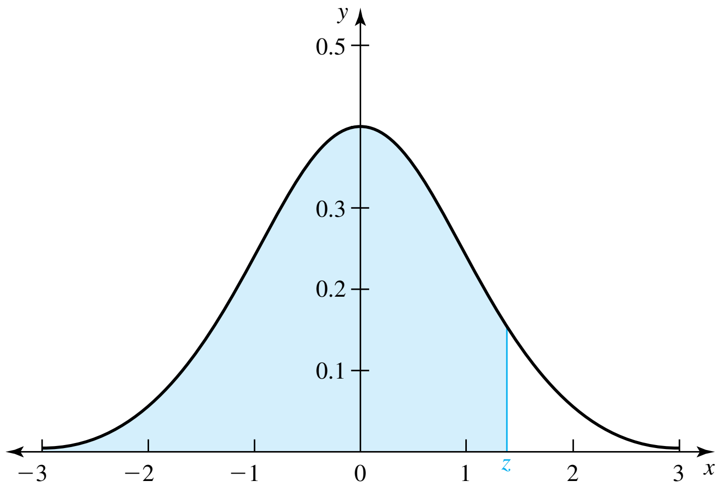


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z.

z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986