ALGEBRA E ANALISI VETTORIALE

il cui grafico è:

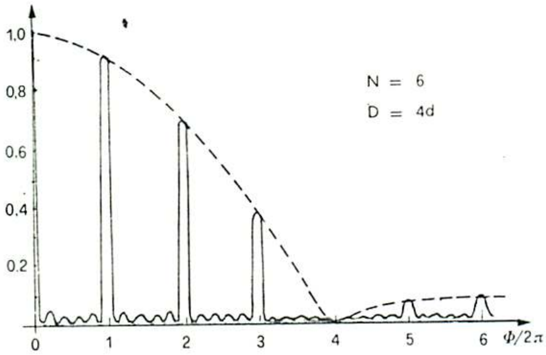


Fig. 36

AI.12. *Diffrazione da figure bidimensionali*

Per ciò che concerne la diffrazione da figure bidimensionali citiamo soltanto la possibilità di considerare una apertura rettangolare come il prodotto di due aperture lineari indipendenti.

PARTE SECONDA

A.II. **Alcune brevi considerazioni di algebra ed analisi vettoriale**

Com'è noto il calcolo vettoriale è stato messo a punto da alcuni matematici italiani (Ricci, Levi-Civita, etc.) sul finire del secolo scorso. Essi avevano denominato questo settore della matematica *calcolo assoluto* (o intrinseco) per mettere in risalto la possibilità di fare i calcoli, per il suo tramite, prescindendo da qualunque sistema di riferimento.

Lo studente dovrebbe già essere cosciente di ciò. Se non lo è rifletta sul fatto che quando scrive:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha \qquad \text{[relazioni intrinseche]}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\alpha\,\hat{n}$$

sta considerando solo elementi geometrici intrinseci come il modulo dei vettori e la loro posizione reciproca e non già proiezioni dei vettori su sistemi di riferimento (componenti).

Ciò viene fatto, invece, allorché le relazioni vettoriali vengono espresse in termini di componenti:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \equiv (\sum A_i\hat{e}_i) \cdot (\sum B_j\hat{e}_j) = \sum A_iB_j\,(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = (\sum A_i\hat{e}_i) \times (\sum B_j\hat{e}_j) = \sum A_iB_j\,(\hat{e}_i \times \hat{e}_j)$$

dove, per acquistare in compattezza e così come faremo nel seguito, abbiamo indicato con 1, 2 e 3 rispettivamente x, y, z e con $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ i versori $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

Una relazione vettoriale espressa in termini di componenti è detta «rappresentazione» di tale relazione.

Compattiamo ulteriormente la notazione adottando la:

Convenzione di Einstein: Un indice ripetuto in una espressione sottintende una somma rispetto ad esso (se non altrimenti specificato). Tale indice viene detto muto. Un indice non muto vien detto libero. Pertanto possiamo riscrivere le (2) come:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_iB_j\,(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \qquad \text{[A.II.3a]}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = A_iB_j\,(\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \qquad \text{[A.II.3b]}$$

Gli indici i e j ripetuti sono indici muti.

Rappresentazione cartesiana del prodotto scalare

Indicheremo $(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)$ con δ_{ij} (simbolo delta di Kronecker). Le proprietà della delta di Kronecker sono quindi le proprietà del prodotto scalare fra versori ortogonali. E cioè:

$$\delta_{ij} = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{array} \right. \qquad \text{[A.II.4]}$$

Pertanto δ_{ij} può essere visto come un operatore che impone di porre l'indice i uguale a j (o viceversa). Quindi:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \delta_{ij} A_i B_j = A_j B_j \qquad \text{[A.II.5]}$$

Si rifletta sul fatto che il membro intermedio è la somma di 9 termini, mentre l'ultimo è solo la somma di 3 termini.

Rappresentazione cartesiana del prodotto vettoriale

Consideriamo ora il prodotto vettoriale. Sappiamo che il prodotto vettoriale di due versori ortogonali è uguale all'altro versore se la terna forma una permutazione ciclica rispetto alla fondamentale, ed all'opposto dell'altro versore negli altri casi. È nullo se i due versori da moltiplicare coincidono. In formula:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{se } i = j & \\ \hat{e}_k & \text{se } i, j, k & \text{sono ciclici} \\ -\hat{e}_k & \text{se } i, j, k & \text{non sono ciclici} \end{array} \right.$$

Compattamente si può scrivere:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \qquad \text{[A.II.6]}$$

dove ε_{ijk} (simbolo di Levi-Civita a tre indici) è nullo se due indici sono uguali; è pari a $+1$ se i, j, k sono ciclici ed è pari a (-1) se i, j, k non sono ciclici (rispetto ad 1, 2, 3).

Sono immediate le relazioni:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}, \text{ etc.} \qquad \text{[A.II.7]}$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{e}_k \varepsilon_{klm} A_l B_m \qquad \text{[A.II.8]}$$

Può sembrare che l'introduzione dei simboli di Levi-Civita e Kronecker sia per lo meno superflua dal momento che è una ridefinizione di quantità già note. Invece il loro uso sistematico consente di sveltire notevolmente il calcolo con i vettori e permette, una volta superate le iniziali difficoltà, di ridurre anche la probabilità di fare errori, poiché con esso si riduce anche il numero di passaggi necessari per ottenere il risultato. Ultimo ma non infimo vantaggio è quello di avere per questa via la possibilità di individuare da sé l'identità che è maggiormente utile ai fini del calcolo. Prima di illustrare con esempi ciò che intendiamo dire, riportiamo senza darne dimostrazione la formula che consente di passare *dai simboli di Levi-Civita a quelli di Kronecker*:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \qquad \text{[A.II.9]}$$

Questa formula si può applicare solo se il primo indice degli ε è lo stesso. Ciò dato, si ricordi che la regola mnemonica per ricordare gli indici delle δ è uguale a quella per il calcolo del determinante di una matrice di rango 2: (11 22 − 12 21).

Prodotto tensoriale e sua rappresentazione cartesiana

Il prodotto tensoriale di due vettori consiste nell'ordinario prodotto termine a termine dei loro componenti

$$\vec{A}\vec{B} = (A_s\hat{e}_s)(B_t\hat{e}_t) = A_sB_t\,\hat{e}_s\hat{e}_t \equiv T_{st}\,\hat{e}_s\hat{e}_t \qquad \text{[A.II.10]}$$

I prodotti dei versori devono ora essere considerati come un tutt'uno noncommutante. Così ad esempio la «diade» ij è diversa dalla diade ji. Il prodotto scalare di una diade per un versore è un versore. Bisogna distinguere il prodotto da destra:

$$\hat{\imath}\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} = \emptyset \qquad \text{[A.II.11]}$$

dal prodotto da sinistra:

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}\hat{\jmath} = \hat{\jmath}$$

Il termine tensore è un termine generico. Il tensore di rango 0 è lo scalare, il tensore di rango 1 è il vettore, il tensore di rango 2 è il tensore propriamente detto, e come già riportato è possibile costruire tensori di rango più elevato semplicemente moltiplicando (tensorialmente), strutture di rango più basso, fra loro.

Scomposizione di un tensore

Ogni tensore T_{ij} può essere scomposto nella somma di un tensore simmetrico ($S_{ij} = S_{ji}$) e di un tensore antisimmetrico ($A_{ij} = -A_{ji}$). Infatti, si ha:

$$T_{ij} = 1/2\,(T_{ij} + T_{ji}) + 1/2\,(T_{ij} - T_{ji}) \qquad \text{[A.II.12]}$$

Pseudo-vettori

A questo riguardo è utile chiarire subito che il «vettore» che si ottiene dal prodotto vettoriale (esterno) di due vettori è in realtà uno pseudovettore, in quanto deriva dalla contrazione di un tensore di rango più elevato. Esiste un modo semplice per convincersi che i «vettori» che derivano da un prodotto vettoriale hanno qualche proprietà diversa dai vettori veri (detti vettori polari per distinguerli dagli pseudovettori, detti anche vettori assiali). Infatti se indichiamo con I_n l'operatore che inverte gli assi cartesiani si ha:

$$I_n\vec{C} \equiv I_n(\vec{A}\times\vec{B}) = I_n(\hat{e}_k\varepsilon_{klm}A_lB_m) = \hat{e}_k\varepsilon_{klm}(-A_l)(-B_m) = \vec{C}$$

mentre

$$I_n\vec{r} \equiv I_n(\hat{e}_k r_k) = \hat{e}_k(-r_k) = -\vec{r}$$

e cioè, dissimilmente dal caso dei vettori polari, la rappresentazione dei vettori assiali rimane inalterata dopo una inversione degli assi cartesiani.

Identità vettoriali

Si vuole ora dimostrare come le espressioni [A.II.5] e [A.II.8] per il prodotto scalare e vettoriale siano particolarmente adatte nel calcolo delle identità vettoriali, cioè nella ricerca di espressioni vettoriali caratterizzate dalla stessa rappresentazione in ogni riferimento.

Si supponga, ad esempio, di essere interessati alla ricerca di una espressione equivalente a:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})$$

Indicando $(\vec{A} \times \vec{B})$ con $\vec{X}$ e $(\vec{C} \times \vec{D})$ con $\vec{Y}$, si ha:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{X} \cdot \vec{Y} = (\text{per la A.II.5}) = X_i Y_i$$

ed essendo

$$X_i \equiv (\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ils} A_l B_s,$$

(per la [A.II.8]) e

$$Y_i \equiv (\vec{C} \times \vec{D})_i = \varepsilon_{imn} C_m D_n,$$

si ha:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{ils} A_l B_s \varepsilon_{imn} C_m D_n = \varepsilon_{ils} \varepsilon_{imn} A_l B_s C_m D_n = \\
&= (\delta_{lm} \delta_{sn} - \delta_{ln} \delta_{sm}) A_l B_s C_m D_n = \\
&= \delta_{lm} \delta_{sn} A_l B_s C_m D_n - \delta_{ln} \delta_{sm} A_l B_s C_m D_n = \\
&= A_m B_n C_m D_n - A_n B_m C_m D_n = (A_m C_m)(B_n D_n) - (A_n D_n)(B_m C_m)
\end{aligned}$$

e cioè:

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot (\underline{C} \times \underline{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

che è l'espressione cercata.

Anche se nei passaggi intermedi abbiamo utilizzato le componenti cartesiane ortogonali dei vettori in istudio, il risultato finale, essendo in forma assoluta, vale immutato in ogni sistema di riferimento.

Con lo stesso metodo si possono ricavare le seguenti identità vettoriali:

$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$	identità tripla	[A.II.13a]
$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} + (\vec{C} \times \vec{A}) \times \vec{B} + (\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{A} = 0$	identità di Jacobi	[A.II.13b]
$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$	prodotto vettoriale doppio	[A.II.13c]

etc. etc.

Nabla

Nel testo viene introdotto e commentato l'operatore *vettoriale* e *differenziale* nabla.

Essendo un vettore esso ha una rappresentazione

assoluta $\quad \vec{\nabla} \quad$ [A.II.14a]

e cartesiana $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k} \equiv \hat{e}_i \partial_i \quad$ [A.II.14b]

Le sue componenti esplicitano la natura differenziale di questo operatore. Essendo queste delle derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti x, y, z, si deduce che il nabla opera su funzioni del punto $f(x, y, z) \equiv f(\vec{r})$.

Com'è noto i fisici e gli ingegneri usano chiamare le funzioni scalari di variabile vettoriale:

$f(\vec{r}) \qquad$ campi scalari

e le funzioni vettoriali di variabile vettoriale:

$\vec{A}(\vec{r}) \qquad$ campi vettoriali.

Gradiente, divergenza, rotore

L'operatore nabla può essere applicato in maniera univoca ad un campo scalare:

$$\vec{\nabla} f = \hat{e}_i \partial_i f \qquad \text{[A.II.15]}$$

In questo caso prende il nome di gradiente.

Può, invece, al pari di qualunque altro vettore essere applicato ad un campo vettoriale con tre diverse modalità:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A_j \delta_{ij} = \partial_i A_i \equiv \operatorname{div} \vec{A}$ [A.II.16]

In questo caso l'operatore $(\vec{\nabla} \cdot)$ prende il nome di divergenza.

b) $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \equiv \operatorname{rot} \vec{A}$ [A.II.17]

In questo caso l'operatore $(\vec{\nabla} \times)$ prende il nome di rotore.

c) $\vec{\nabla} \vec{A} = \hat{e}_i \hat{e}_j \partial_i A_j$ [A.II.18]

Quest'ultima relazione prevede il prodotto tensoriale (l'usuale prodotto termine a termine) del nabla per il vettore $\vec{A}$.

Tenendo presente la natura differenziale del nabla, si ha che:

a) generalmente esso non gode della proprietà commutativa,

b) quando opera sul prodotto di più campi, vi opera come le derivate.

Tenuto conto di ciò, è possibile trattarlo nel calcolo così come un vettore.

Dimostramo a mo' di esempio alcune relazioni vettoriali utili in fisica.

Siano v, w due campi vettoriali ed f un campo scalare derivabili della posizione. Valgono le seguenti identità:

1) $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} f) \doteqdot \partial_i (\mathrm{v} f)_i = \partial_i (\mathrm{v}_i f) = (\partial_i \mathrm{v}_i) f + \mathrm{v}_i \partial_i f \doteqdot$$
$$\doteqdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f \equiv f \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} f$$

2) $$\vec{\nabla} \times (\vec{v} f) \doteqdot \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_l (\mathrm{v}_m f) = \hat{e}_k \varepsilon_{klm} (\partial_l \mathrm{v}_m f +$$
$$+ \mathrm{v}_m \partial_l f) \doteqdot (\vec{\nabla} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{\nabla}) f \equiv f \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \times \operatorname{grad} f$$

3) $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \doteqdot \partial_i (\varepsilon_{ilm} \mathrm{v}_l w_m) =$$
$$= \varepsilon_{ilm} (\mathrm{v}_l \partial_i w_m + w_m \partial_i \mathrm{v}_l) \doteqdot$$
$$\doteqdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} - (\vec{\nabla} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} \equiv \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{w} - \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \vec{v}$$

4) $$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \doteqdot \hat{e}_s \varepsilon_{smn} \partial_m (\mathrm{v} \times w)_n =$$
$$= \hat{e}_s \varepsilon_{smn} \varepsilon_{nqt} \partial_m (\mathrm{v}_q w_t) =$$
$$= \hat{e}_s (\delta_{sq} \delta_{mt} - \delta_{st} \delta_{mq}) (\mathrm{v}_q \partial_m w_t + w_t \partial_m \mathrm{v}_q) =$$
$$= \hat{e}_q \mathrm{v}_q \partial_t w_t + \hat{e}_q w_t \partial_t \mathrm{v}_q - \hat{e}_t \mathrm{v}_q \partial_q w_t - \hat{e}_t w_t \partial_q \mathrm{v}_q \doteqdot$$
$$\doteqdot \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - \vec{w} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

5) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \doteqdot \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_l (\nabla \times A)_m =$

$= \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_l (\varepsilon_{mst} \partial_s A_t) =$

$= \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mst} \partial_l \partial_s A_t =$

$= \hat{e}_k (\delta_{ks} \delta_{lt} - \delta_{kt} \delta_{ls}) \partial_l \partial_s A_t =$

$= \hat{e}_s \partial_t \partial_s A_t - \hat{e}_t \partial_s \partial_s A_t =$

$= (\hat{e}_s \partial_s)(\partial_t A_t) - (\partial_s \partial_s)(\hat{e}_t A_t) \doteqdot$

$\doteqdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \equiv \text{grad div} \vec{A} - \text{lapl} \vec{A}$

Nel terz'ultimo passaggio si è invertito l'ordine delle derivate parziali supponendo soddisfatte le condizioni previste dal teorema di Schwartz.

Analogamente si ricava:

6) $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla}\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{\nabla}\vec{B} \cdot \vec{A}$

tenendo presente che $\vec{\nabla}\vec{A} \cdot \vec{B} \neq \vec{B} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}$

in quanto $\vec{\nabla}\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\nabla}\vec{A} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$.

7) $\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}\vec{A} \times \vec{B} - \vec{\nabla}\vec{B} \times \vec{A}$

Proprietà del simbolo di Levi-Civita

Dalla definizione del simbolo di Levi-Civita consegue che esso è antisimmetrico rispetto ad ogni coppia di indici. Cambia segno, cioè, ogni volta che si traspongono due qualunque dei suoi indici. Questo ha come conseguenza che se due degli elementi su cui opera la ε sono indistinguibili il prodotto è nullo. Infatti per l'indistinguibilità degli operandi è possibile commutarli senza che questo cambi segno all'espressione, ma trasponendo i loro indici l'espressione cambia segno. Poiché l'unico vettore uguale al suo opposto è il vettore nullo, ne consegue che quel prodotto vettoriale è uguale a zero.

L'esempio che segue mostra come il rotore del gradiente di una qualunque funzione scalare sia nullo. Infatti:

$$\vec{A} \equiv \boxed{\text{rot grad}\,\varphi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_l \partial_m \varphi = \emptyset} \qquad \text{[A.II.28]}$$

invertendo l'ordine di derivazione si ha:

$$\hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_m \partial_l \varphi$$

operando una trasposizione degli indici l ed m in ε, si ha:

$$-\hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_m \partial_l \varphi \doteqdot -\text{rot grad}\,\varphi$$

cioè $\vec{A} = -\vec{A}$ che implica $\vec{A} = \emptyset$.

Tutto ciò può essere previsto osservando che nella espressione [A.II.28] *vi sono due operandi trasponibili uguali*, le due ∂ cioè.

Dopo quanto detto si vede immediatamente che

$$\boxed{\text{div rot}\vec{A} = \partial_i (\varepsilon_{ilm} \partial_l A_m) = \varepsilon_{ilm} \partial_i \partial_l A_m = \emptyset}$$

Pertanto possiamo dire che *se due operandi trasponibili nell'ε di Levi-Civita sono uguali l'espressione è nulla*:

$$\varepsilon_{klm} X_k X_l Y_m = 0 \qquad \text{proprietà dell'indistinguibilità degli operandi} \qquad \text{[A.II.29]}$$

Inoltre, se:

$$\varepsilon_{klm} A_k B_l C_m = 0 \quad \text{proprietà dell'invertibilità degli indici} \qquad \text{[A.II.39]}$$

allora è possibile trasporre due indici negli operandi.

Riepilogando si ha il seguente schema:

	grad	div	rot
grad	tens	$\vec{\nabla}$ (div)	tens
div	lapl	no	$\emptyset$
rot	$\emptyset$	no	$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot) - \nabla^2$

Il vettore posizione

Il vettore posizione $\vec{r}$, essendo il vettore che individua la posizione del punto corrente $P(x, y, z)$ è una delle entità vettoriali piu importanti.

In forma cartesiana esso è dato da:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = r_i \hat{e}_i$$

Sono immediate le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\partial_m r_s &= \delta_{ms} \\
\partial_m \vec{r} &= \partial_m (r_i \hat{e}_i) = \delta_{mi} \hat{e}_i = \hat{e}_m \qquad \partial_m r = r_m / r \\
\vec{\nabla} r &= \hat{e}_m \partial_m r = \hat{e}_m r^{-1} r_m = r^{-1} \vec{r} = \hat{r} \\
\vec{\nabla} f(r) &= \hat{e}_m f'(r)\, \partial_m r = f'(r)\, \hat{r} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= \partial_i r_i = 3 \\
\vec{\nabla} \times \vec{r} &= \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_l r_m = \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_{lm} = \vec{\emptyset}
\end{aligned} \qquad \text{[A.II.31]}$$

Tenendo presenti le [A.II.31] i calcoli che riguardano il vettore $\vec{r}$ ed il suo modulo risultano molto agevolati.

Esempio n. 1 (campo di un dipolo di momento $\vec{p}$):

Calcolare il gradiente di $V(r) = \vec{r} \cdot \vec{p}/r^3$ essendo $\vec{p}$ un vettore costante. Si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\, \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} &\doteq \hat{e}_i \partial_i (r^{-3}\, p_m r_m) = \hat{e}_i p_m \partial_i (r_m r^{-3}) = \\
&= \hat{e}_i p_m \{ r_m (-3\, r^{-4})\, r^{-1} r_i + r^{-3} \delta_{im} \} = \\
&= r^{-3} \hat{e}_i p_i - 3\, r^{-5}\, p_m r_m r_i \hat{e}_i = \\
&\doteq r^{-5} (r^2 \vec{p} - 3\, \vec{r}\, (\vec{p} \cdot \vec{r})) .
\end{aligned}$$

$$\underline{\nabla} \times \left(\frac{\bar{r}}{r^3} \times \bar{p} \right) =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_i\, \partial_j\, \varepsilon_{klm}\, \frac{r_l}{r^3}\, p_m =$$

$$= \varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{klm}\, \hat{e}_i\, p_m\, \partial_j\, \frac{r_l}{r^3} =$$

$$= \left(\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl} \right) \hat{e}_i\, p_m \left(\frac{1}{r^3}\,\delta_{jl} - r_l\, \frac{3}{r^4}\, \frac{r_j}{r} \right)$$

$$= \delta_{ij}\, \hat{e}_i\, p_j\, \frac{1}{r^3} - \delta_{im}\, \hat{e}_i\, p_m\, \frac{3}{r^3} - \hat{e}_i\, p_j\, \frac{3}{r^5}\, r_i r_j +$$

$$+ \hat{e}_i\, p_i\, \frac{3}{r^5}\, r_j r_j =$$

$$= \frac{\bar{p}}{r^3} - 3\,\frac{\bar{p}}{r^3} - 3\,\frac{\bar{r}\,(\bar{r}\cdot\bar{p})}{r^5} + 3\,\frac{\bar{p}}{r^3}$$

$$= \frac{\bar{p}}{r^3} - 3\,\frac{\bar{r}\,(\bar{r}\cdot\bar{p})}{r^5}$$

$$\underline{\nabla} \left(\frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \bar{p} \right) = \hat{e}_i\, \partial_i \left(\frac{1}{r^3}\, r_l p_l \right) = \hat{e}_i \left[-3 r^{-4}\, \frac{r_i}{r}\, r_l p_l + r^{-3}\, \delta_{il}\, p_l \right]$$

$$= \hat{e}_i \left[\frac{p_i}{r^3} - 3\,\frac{r_i}{r^5}\, r_l p_l \right] = \frac{\bar{p}}{r^3} - \frac{3\, \underline{r}\,(\underline{r}\cdot\bar{p})}{r^5}$$

dato $\underline{\nabla} \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^3} \right) = \frac{3(\bar{p} \cdot \bar{r})\, \bar{r} - \bar{p}\, r^2}{r^5}$

dimostrare che:

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} \right) = 0$$

$$\underline{\nabla} \times \frac{3(\bar{p} \cdot \bar{r})\bar{r}}{r^5} = \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_i\, \partial_j \frac{3\, p_l r_l}{r^5} r_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_i\, 3 p_l \left(\cancel{3}\, \frac{r_k}{r^5} \delta_{jl} \cancel{r_k} + \frac{r_l}{r^5} \delta_{jk} - 5 r_l r_k \frac{1}{r^6} \frac{r_j}{r} \right)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_k \left(\frac{3\, p_j r_k}{r^5} + 0 - 15\, r_l p_l \frac{r_k r_j}{r^7} \right) =$$

$$= 3 \frac{\bar{p} \times \bar{r}}{r^5} + 0$$

$$\underline{\nabla} \times \frac{\bar{p}\, r^2}{r^5} = \underline{\nabla} \times \bar{p} \frac{1}{r^3} = \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_i\, \partial_j\, p_k \frac{1}{r^3} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_i\, p_k \left(-\frac{3}{r^4} \frac{r_j}{r} \right) = \cancel{-3 \frac{\bar{p} \times \bar{r}}{r^5}}$$

$$= -3 \frac{\bar{r} \times \bar{p}}{r^5} = \frac{3}{r^5} \bar{p} \times \bar{r}$$

Esempio n. 2 (Potenziale vettore del campo di un dipolo di momento $\vec{p}$):

Sia da calcolare il rotore del campo vettoriale $\vec{C} = \vec{r} \times \vec{p}/r^3$ essendo $\vec{p}$ un vettore costante. Si ha, per $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{p}\right) &\doteq \hat{e}_k \varepsilon_{klm} \partial_l \left(\varepsilon_{mst} \frac{r_s}{r^3} p_t\right) = \\
&= \hat{e}_k (\delta_{ks}\delta_{lt} - \delta_{kt}\delta_{ls})\, p_t \left(\frac{1}{r^3}\delta_{ls} + r_s \left(\frac{-3}{r^4}\right)\frac{r_l}{r}\right) = \\
&= \hat{e}_s p_t \left(\frac{\delta_{ts}}{r^3} + \frac{r_s r_t(-3)}{r^5}\right) - \hat{e}_t p_t \left(\frac{3}{r^3} + \frac{r^2(-3)}{r^5}\right) = \\
&\doteq \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}
\end{aligned}$$

Esempio n. 3 (Irrotazionalità del campo di un dipolo).

Sia da calcolare il rotore del campo $\vec{C} = (3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2)/r^5$. Per $r \neq 0$, si ha:

$\underline{\nabla} \times \left(\underline{\nabla}\ \frac{\underline{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = 0$

$$\begin{aligned}
1)\ \vec{\nabla} \times \left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right) &\equiv \vec{\nabla} \times \vec{r}\left(\frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\right) - \vec{r} \times \vec{\nabla}\left(\frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\right) = \\
&\doteq 3\hat{e}_s\partial_s\left(\frac{p_i r_i}{r^5}\right) \times \vec{r} = 3\hat{e}_s p_i \left(\frac{\delta_{si}}{r^5} + r_i\left(-\frac{5}{r^6}\right)\frac{r_s}{r}\right) \times \vec{r} = \\
&= \frac{3\vec{p}\times\vec{r}}{r^5} - 15\frac{\vec{r}\times\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})}{r^7} = \frac{3\vec{p}\times\vec{r}}{r^5}
\end{aligned}$$

$$2)\ \vec{\nabla} \times \frac{\vec{p}}{r^3} = \emptyset - \vec{p} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{3\vec{p}\times\vec{r}}{r^5}$$

Pertanto $(1) - (2) = \emptyset$.

Esempio n. 4 (Momento torcente su spira sghemba).

Si voglia dimostrare che il valore del seguente integrale è indipendente dalla forma della linea chiusa γ, ma dipende soltanto dal valore dell'area racchiusa, (essendo B_o uniforme):

$$\begin{aligned}
I &= \oint_\gamma \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}_o) = \text{per la [A.II.13c]} = \\
&= \oint_\gamma (\vec{r}\cdot\vec{B}_o)\, d\vec{r} - \oint_\gamma (\vec{r}\cdot d\vec{r})\, \vec{B}_o \doteq \\
&\doteq \oint_\gamma \hat{e}_s dr_s r_i B_{oi} = \text{per la [A.II.12]} = \\
&= \oint_\gamma \hat{e}_s B_{oi} \frac{1}{2}(dr_s r_i + dr_i r_s) + \oint_\gamma \frac{1}{2} \hat{e}_s B_{oi} (dr_s r_i - dr_i r_s) \doteq \\
&\doteq \frac{1}{2}\oint_\gamma (\vec{r}\cdot\vec{B}_o)\, d\vec{r} - (\vec{B}_o\cdot d\vec{r})\,\vec{r} = \frac{1}{2}\oint_\gamma \vec{B}_o \times (d\vec{r}\times\vec{r}) = \\
&= -\vec{B}_o \times \oint_\gamma \frac{1}{2}\vec{r}\times d\vec{r} = \vec{S}\times\vec{B}_o
\end{aligned}$$

Si noti che al 2° e 4° passaggio è stata annullata la circuitazione di un differenziale esatto. Nell'ultimo passaggio, l'area $\frac{1}{2}\oint_\gamma \vec{r}\times d\vec{r}$ è stata indicata con $\vec{S}$.

esempio $\nabla^2 \frac{1}{r} = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ ? & \end{cases}$

$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(r)$

per $r \neq 0$ $\quad \nabla^2 \frac{1}{r} = \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \underline{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{r^3} \bar{r} \right) =$

$$= -\frac{1}{r^3} \underline{\nabla} \cdot \bar{r} + \bar{r} \cdot \underline{\nabla}\left(-\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \bar{r} \cdot \frac{3}{r^4} \hat{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \partial_i \partial_i \frac{1}{r} = \partial_i \left(-\frac{1}{r^2} \frac{r_i}{r} \right) = \partial_i \left(-\frac{1}{r^3} r_i \right) =$$

$$= \frac{3}{r^4} \frac{r_i}{r} r_i - \frac{1}{r^3} \delta_{ii} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

Per il tratto $C\bar{P}$:

$$\left.\begin{array}{l} x = \bar{x} = \text{cost} \\ y = \bar{y} = \text{cost} \\ z = z \end{array}\right\} \begin{array}{l} dx = 0 \\ dy = 0 \\ dz = dz \end{array}$$

dunque:

$$\int_C^{\bar{P}} (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) = \int_0^{\bar{z}} cz\,dz = \frac{1}{2}\,c\bar{z}^2$$

Dunque in definitiva

$$V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - V(0, 0, 0) = \frac{1}{2}a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{2}\,c\bar{z}^2$$

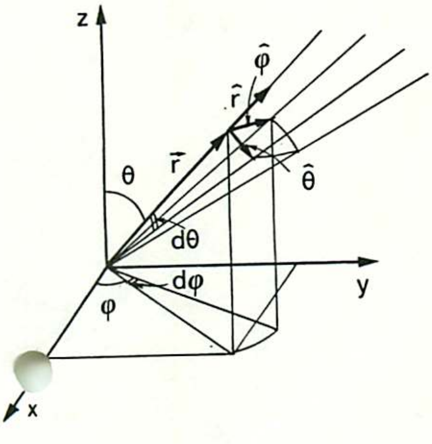
ovvero:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cz^2 + \text{costante}\,.$$

È immediato verificare che effettuando le derivate parziali di questa funzione si ottengono in effetti le [IV.64], così come richiesto dalle [IV.62].

IV.8.4. *L'operatore gradiente in coordinate cartesiane e polari*

Operatore gradiente



Abbiamo visto che, quando sia noto il potenziale in funzione delle coordinate cartesiane, le componenti della forza secondo i tre assi possono essere facilmente calcolate effettuando le derivate parziali del potenziale stesso secondo le tre coordinate.

Può essere utile, talvolta, trattare il problema in coordinate polari: avendo allora a disposizione l'espressione del potenziale in funzione di r, θ, φ, si dovranno trovare le componenti della forza secondo i versori $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ (vedi figura).

Ciò può essere fatto in maniera compatta introducendo l'*operatore vettoriale gradiente*. L'operatore gradiente, che si indica col simbolo $\vec{\nabla}$, è definito dalla relazione:

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = dV \qquad [IV.65]$$

Il gradiente di V è quel vettore che moltiplicando scalarmente per lo spostamento elementare $d\vec{r}$ fornisce il differenziale dV della funzione.

Nel caso che V rappresenti il potenziale di un campo di forze conservativo, essendo (per la IV.60) $dV = dL = \vec{f} \cdot d\vec{r}$, il gradiente di V rappresenta il campo di forze

$$\vec{f} = \vec{\nabla} V \qquad [IV.66]$$

In coordinate cartesiane, lo spostamento $d\vec{r}$ ha per componenti dx, dy, dz, per cui tenendo conto della definizione [IV.57] del differenziale, la [IV.65] diviene

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = \nabla_x V \cdot dx + \nabla_y V \cdot dy + \nabla_z V \cdot dz = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

da cui discende, per confronto,

$$\nabla_x V = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \nabla_y V = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \nabla_z V = \frac{\partial V}{\partial z} \qquad [IV.67]$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

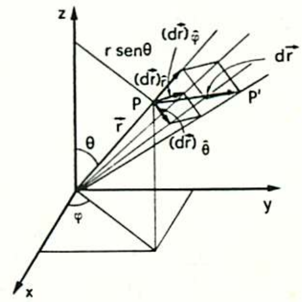
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Componenti cartesiane del gradiente

Le componenti cartesiane del gradiente di una funzione V sono le derivate parziali della funzione stessa rispetto alle tre coordinate.

Nel caso di coordinate polari, il differenziale della funzione $V(r, \theta, \varphi)$ è, secondo la [IV.57]

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi \qquad \text{[IV.68]}$$



Mentre, come si vede in figura, le componenti dello spostamento $d\vec{r}$ sono

$$(d\vec{r})_{\hat{r}} = dr \qquad (d\vec{r})_{\hat{\theta}} = r\,d\theta \qquad (d\vec{r})_{\hat{\varphi}} = r \sin\theta\, d\varphi \qquad \text{[IV.69]}$$

Introducendo la [IV.68] e la [IV.69] nella [IV.65] si ha:

$$\nabla_r V \cdot dr + \nabla_\theta V \cdot r\,d\theta + \nabla_\varphi V \cdot r \sin\theta\, d\varphi = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi$$

da cui per confronto risulta:

$$\nabla_r = \frac{\partial V}{\partial r} \qquad \nabla_\theta V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad \nabla_\varphi V = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \qquad \text{[IV.70]}$$

che costituiscono la *rappresentazione polare* (o *sferica*) del gradiente. Se V è il potenziale di un campo di forze conservativo, secondo la [IV.66] si ha che le [IV.70] rappresentano *le componenti polari del campo di forze.*

Componenti polari del campo (del gradiente)

IV.9. Il teorema di conservazione dell'energia meccanica

In un campo di forze conservativo, dunque, il lavoro $L_{A,B}$ può essere espresso tramite la [IV.56], cioè come differenza fra i valori che la funzione potenziale V assume in B e in A:

$$L_{AB} = V(B) - V(A)$$

Associando questa relazione con la [IV.42] - valida qualunque sia la natura delle forze agenti - che esprime il teorema dell'energia cinetica, si ha

$$K_B - K_A = V(B) - V(A)$$

ovvero

$$K_A - V(A) = K_B - V(B)$$

Introduciamo ora la funzione $U(x, y, z)$ definita come l'opposto del potenziale ($U = -V$), la precedente relazione diviene

$$K_A + U(A) = K_B + U(B) \qquad \text{[IV.71]}$$

e poiché i punti A e B sono due punti qualunque, questa equivale a scrivere

$$K + U = E = \text{costante} \qquad \text{[IV.72]}$$

Laplaciano in coordinate polari

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\nabla^2 \equiv \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\quad\right)} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} &= -\frac{\sin\theta}{r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} - \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$$

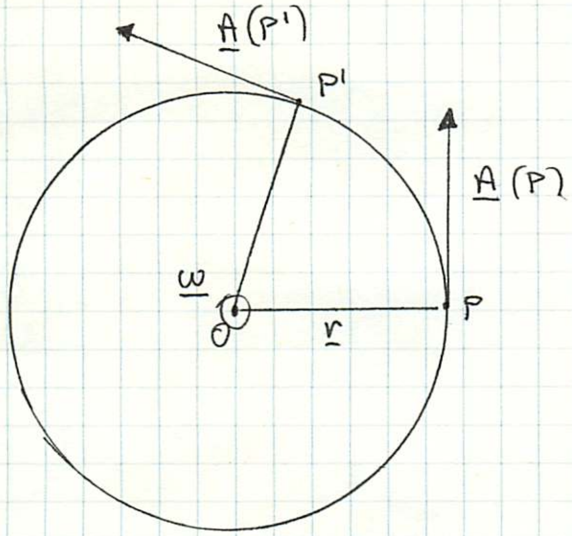
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi - \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta\cos^2\varphi\sin\theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi \\ & + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta} - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta}{r^2} \\ & + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r\sin\theta} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2\sin\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \\ & + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\end{aligned}$$

Significato geometrico del rotore



si consideri un vettore planare $\underline{A}(\underline{r})$ del tipo $\underline{A}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$
con $\underline{\omega}$ ortogonale al piano e costante

$$\underline{\nabla} \times \underline{A} = \nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) =$$

$$= \underline{\omega}\left(\underline{\nabla} \cdot \underline{r}\right) + \left(\underline{r} \cdot \underline{\nabla}\right)\underline{\omega} - \left(\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla}\right)\underline{r} - \underline{r}\left(\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega}\right)$$

$$= \underline{\omega}\, 3 + 0 - \left(\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} x,\ \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} y,\ \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} z\right) - 0$$

$$= \underline{\omega}\, 3 - \underline{\omega} = 2\underline{\omega}$$

allo stesso risultato si arriva usando il teorema di Stokes:

$$\underbrace{\oint \underline{A} \cdot d\underline{l}}_{\text{Vcerchio di raggio } r} = A\, 2\pi r = |\underline{\omega} \times \underline{r}|\, 2\pi r = 2\omega \cdot \pi r^2 = 2\underline{\omega} \cdot \hat{n}\, S$$

$$= \int_S \left(\underline{\nabla} \times \underline{A}\right) \cdot \hat{n}\, dS \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\nabla} \times \underline{A} = 2\underline{\omega}$$

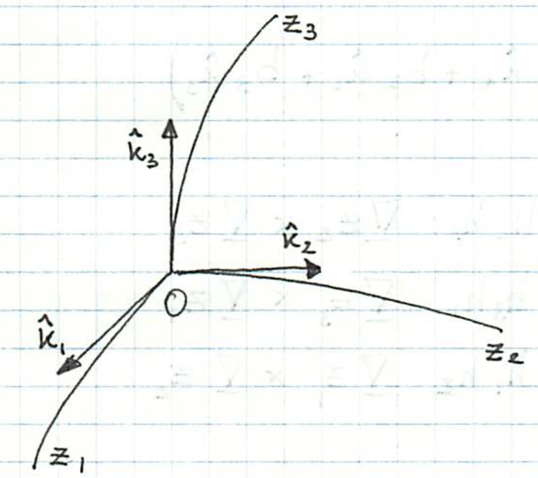
Operatore ∇ in coordinate curvilinee

Le equazioni $z_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$ $z_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$ $z_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$ con f_1 f_2 f_3 a singolo valore e differenziabili descrivono un sistema di coordinate curvilinee $z_1\, z_2\, z_3$ in termini di quelle cartesiane $x_1 x_2 x_3$. Si suppone che lo Jacobiano della trasformazione sia non nullo così che anche la trasf. inversa è definita.

$z_i = f_i(x_1, x_2, x_3) =$ costante definisce una superficie parametrica di z_i

L'intersezione di due superfici parametriche di z_2 e z_3 definisce una linea parametrica di z_1

Si considerino le 3 linee parametriche di z_1 z_2 z_3 che passano per un generico punto O e siano $\hat{u}_1$ $\hat{u}_2$ e $\hat{u}_3$ i 3 versori tangenti uscenti da O



Consideriamo solo il caso di coordinate curvilinee ortogonali in cui $\hat{u}_1$ $\hat{u}_2$ e $\hat{u}_3$ formano una terna ortogonale (destra)

A causa dell'ortogonalità la distanza infinitesima è:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = (h_1\, dz_1)^2 + (h_2\, dz_2)^2 + (h_3\, dz_3)^2$$

ovvero lungo le linee parametriche

$ds = h_i dz_i$

Si consideri ora il gradiente $\underline{\nabla} z_i$

$(df = \underline{\nabla} f \cdot d\underline{s})$

$\underline{\nabla} z_i$ è ortogonale alla superficie $z_i =$ costante e di modulo $\frac{dz_i}{ds} = \frac{1}{h_i}$

quindi $\hat{k}_i = h_i \underline{\nabla} z_i$

e anche $\hat{k}_1 \cdot (\hat{k}_2 \times \hat{k}_3) = h_1 h_2 h_3 \; \underline{\nabla} z_1 \cdot (\underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3) = 1$

<u>Gradiente</u> def.: $df = \underline{\nabla} f \cdot d\underline{s} = \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i = \frac{\partial f}{\partial z_i} \underline{\nabla} z_i \cdot d\underline{s}$

$$\underline{\nabla} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \underline{\nabla} z_i = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial z_i} \hat{k}_i$$

<u>Divergenza</u>

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{b} = \underline{\nabla} \cdot (b_1 \hat{k}_1 + b_2 \hat{k}_2 + b_3 \hat{k}_3)$$

$$\hat{k}_1 = \hat{k}_2 \times \hat{k}_3 = h_2 h_3 \; \underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3$$
$$\hat{k}_2 = \hat{k}_3 \times \hat{k}_1 = h_3 h_1 \; \underline{\nabla} z_3 \times \underline{\nabla} z_1$$
$$\hat{k}_3 = \hat{k}_1 \times \hat{k}_2 = h_1 h_2 \; \underline{\nabla} z_1 \times \underline{\nabla} z_2$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{b} = \underline{\nabla} \cdot \Big(b_1 h_2 h_3 \; \underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3 + b_2 h_3 h_1 \; \underline{\nabla} z_3 \times \underline{\nabla} z_1 + b_3 h_1 h_2 \; \underline{\nabla} z_1 \times \underline{\nabla} z_2 \Big)$$

$$\underline{\nabla} \cdot (b_1 h_2 h_3 \; \underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3) = \underline{\nabla}(b_1 h_2 h_3) \cdot (\underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3) + b_1 h_2 h_3 \; \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3)$$

$$\underline{\nabla}\left(b_1 h_2 h_3\right)\cdot\left(\underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3\right) =$$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}\left(b_1 h_2 h_3\right)\underline{\nabla} z_i \cdot\left(\underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3\right) = \frac{\partial}{\partial z_1}\left(b_1 h_2 h_3\right)\underline{\nabla} z_1 \cdot\left(\underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3\right)$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(b_1 h_2 h_3\right)$$

$$\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla} z_2 \times \underline{\nabla} z_3\right) = \underline{\nabla} z_3 \cdot\left(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} z_2\right) - \underline{\nabla} z_2 \cdot\left(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} z_3\right) = 0$$

poichè $\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} f = 0$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(b_1 h_2 h_3\right) + \frac{\partial}{\partial z_2}\left(b_2 h_3 h_1\right) + \frac{\partial}{\partial z_3}\left(b_3 h_1 h_2\right)\right]$$

<u>Rotore</u>

$$\underline{\nabla}\times\underline{b} = \underline{\nabla}\times\left(b_1\hat{k}_1 + b_2\hat{k}_2 + b_3\hat{k}_3\right) =$$

$$= \underline{\nabla}\times\left(b_1 h_1 \underline{\nabla} z_1 + b_2 h_2 \underline{\nabla} z_2 + b_3 h_3 \underline{\nabla} z_3\right)$$

$$\underline{\nabla}\times\left(b_1 h_1 \underline{\nabla} z_1\right) = \underline{\nabla}\left(b_1 h_1\right)\times\underline{\nabla} z_1 + b_1 h_1 \cancel{\underline{\nabla}\times\left(\underline{\nabla} z_1\right)} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}\left(b_1 h_1\right)\underline{\nabla} z_i \times \underline{\nabla} z_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z_2}\left(b_1 h_1\right)\frac{1}{h_2 h_1}\hat{k}_2\times\hat{k}_1 + \frac{\partial}{\partial z_3}\left(b_1 h_1\right)\frac{1}{h_3 h_1}\hat{k}_3\times\hat{k}_1 =$$

$$= -\frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(b_1 h_1\right)\hat{k}_3 + \frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial z_3}\left(b_1 h_1\right)\hat{k}_2$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{b} = \hat{k}_1 \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial z_2} \left(b_3 h_3 \right) - \frac{\partial}{\partial z_3} \left(b_2 h_2 \right) \right] +$$

$$+ \hat{k}_2 \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial z_3} \left(b_1 h_1 \right) - \frac{\partial}{\partial z_1} \left(b_3 h_3 \right) \right] +$$

$$+ \hat{k}_3 \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(b_2 h_2 \right) - \frac{\partial}{\partial z_2} \left(b_1 h_1 \right) \right]$$

<u>Laplaciano</u>

$$\nabla^2 f = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} f = \underline{\nabla} \cdot \left(\sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial z_i} \hat{k}_i \right) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial z_3} \right) \right]$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{k}_1}{h_2 h_3} & \frac{\hat{k}_2}{h_1 h_3} & \frac{\hat{k}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \\ b_1 h_1 & b_2 h_2 & b_3 h_3 \end{vmatrix}$$

Coordinate cilindriche $r\ \theta\ z$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta)^2 + dz^2 \qquad h_1 = h_3 = 1 \qquad h_2 = r$$

$$\underline{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{b} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(b_r r\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(b_z r\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(b_r r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial b_z}{\partial z}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{b} = \hat{u}_r \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(b_\theta r\right) \right] + \hat{u}_\theta \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(b_r\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(b_z\right) \right]$$

$$+ \hat{u}_z \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(b_\theta r\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_r\right) \right] =$$

$$= \hat{u}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial b_z}{\partial \theta} - \frac{\partial b_\theta}{\partial z} \right) + \hat{u}_\theta \left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r} \right) + \hat{u}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(b_\theta r\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial b_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial f}{\partial z}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordinate polari $r\ \theta\ \varphi$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \qquad h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r\sin\theta$$

$$\underline{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{b} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(b_r r^2 \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_\theta\, r\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(b_\varphi\, r\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(b_r r^2\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{b} = \hat{k}_r \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_\varphi r\sin\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(b_\theta r\right)\right] +$$

$$+ \hat{k}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(b_r\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(b_\varphi r\sin\theta\right)\right] +$$

$$+ \hat{k}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(b_\theta r\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_r\right)\right] =$$

$$= \hat{k}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi}\right] + \hat{k}_\theta\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial b_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(b_\varphi r\right)\right]$$

$$+ \hat{k}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(b_\theta r\right) - \frac{\partial b_r}{\partial \theta}\right]$$

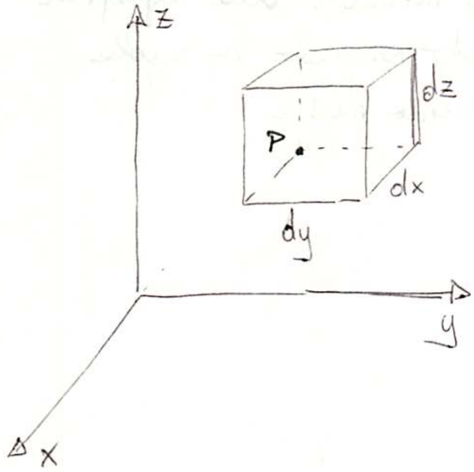
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{r\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{r}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r f\right) + \cdots$$

Teorema della divergenza (Gauss)

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{A} \, dV = \int_S \underline{A} \cdot \hat{n} \, dS$$



$\hat{n}$ = normale esterna alla superficie S che racchiude il volume V

flusso uscente $= d\phi = \sum_{i=1}^{6} \underline{A} \cdot \underline{n}_i \, dS_i =$

$$= -\left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz -$$

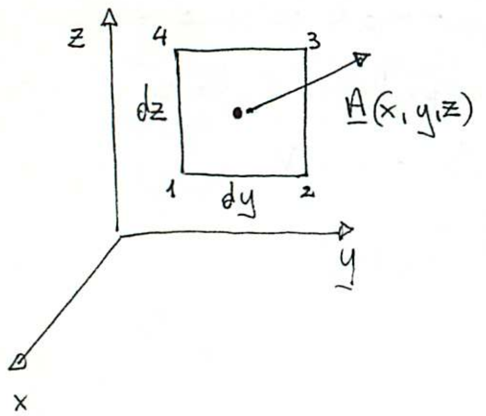
$$-\left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz -$$

$$-\left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy =$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \underline{\nabla} \cdot \underline{A} \; dx\, dy\, dz$$

Teorema di Stokes (del rotore)

$$\int_S (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \cdot \hat{n} \, dS = \oint_C \underline{A} \cdot d\underline{l}$$



$\hat{n}$ = versore normale alla superficie orientato secondo la regola della mano destra

$$\text{circuitazione} = \int_1^2 \underline{A} \cdot d\underline{l} + \int_2^3 \underline{A} \cdot d\underline{l} + \int_3^4 \underline{A} \cdot d\underline{l} + \int_4^1 \underline{A} \cdot d\underline{l} =$$

$$= \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{1}{2} dz\right) dy + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{1}{2} dy\right) dz - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{1}{2} dz\right) dy$$

$$- \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{1}{2} dy\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \, dz = (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \cdot \hat{\imath} \, dS$$

per una generica superficie infinitesima di normale $\hat{n}$

$$\text{circuitazione infinitesima} = (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \cdot \hat{n} \, dS$$

Campi centrali 3

Ogni campo radiale a simmetria sferica (campo centrale) è conservativo in tutto lo spazio. Ciò significa, in termini locali, che il rotore del campo è ovunque nullo. Infatti, indicando il generico campo centrale con:

$$\vec{E} = f(r)\,\vec{r}$$

centrale $\longrightarrow$ conservativo

si ha:

se $f(r) = \frac{cost}{r^3}$ $\longrightarrow$ solenoidale

$\partial_l r = \frac{r_l}{r}$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E} &= \hat{e}_k \varepsilon_{klm}\,\partial_l\,(f(r)\,r_m) = \\ &= \hat{e}_k \varepsilon_{klm}\left\{(\partial_l f(r))r_m + f(r)\,\partial_l r_m\right\} = \\ &= \hat{e}_k \varepsilon_{klm}\left(\frac{f'(r)}{r}\,r_l r_m + f(r)\,\delta_{lm}\right) = 0\end{aligned}$$

Questa espressione è identicamente nulla: il primo addendo per l'indistinguibilità dei due operandi [A.II.29], ed il secondo addendo perché la delta di Kronecker impone l'uguaglianza di due indici nel simbolo di Levi-Civita.

Campi conservativi o irrotazionali 1

Definizione

Un campo vettoriale $\vec{E}$ è conservativo in R se, in tutti i punti del dominio semplicemente connesso R, vale:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\emptyset}$$

Potenziale scalare

Si è mostrato [A.II.18] come il rotore del gradiente di una qualunque funzione scalare V sia identicamente nullo:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = 0$$

È possibile pertanto associare ad ogni campo conservativo $\vec{E}$ un campo scalare V, tale che:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad \text{[A.II.32]}$$

Il campo V prende il nome di potenziale scalare del campo $\vec{E}$. Come si vede, ad un assegnato campo conservativo $\vec{E}$ sono associati infiniti potenziali scalari. Infatti se V è un potenziale scalare, anche

$$V' = V + \text{cost}$$

risulta essere un potenziale scalare di $\vec{E}$.

Per ricavare il potenziale da un assegnato campo vettoriale è necessario invertire la relazione [A.II.32] o, in altri termini, integrare questa equazione differenziale del primo ordine alle derivate parziali.

Nei limiti di questa succinta rassegna si segnalano due procedimenti:

1) Se il campo considerato non è anche solenoidale ($\operatorname{div} E = 0$) oltre che conservativo, la sua divergenza sarà pari ad una qualche funzione scalare, diciamo ρ:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho$$

e poiché $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) = -\nabla^2 V = \rho$$

e cioè

$$\nabla^2 V = -\rho \qquad \text{[Equaz. di Poisson]}$$

È noto dall'Analisi che se le sorgenti ρ sono tutte al finito, se non vi sono superfici limiti (la regione di validità dell'equazione è estesa a tutto lo spazio τ_∞) ed il campo decresce con la distanza con sufficiente rapidità, allora l'equazione di Poisson ammette la soluzione:

$$V(\vec{r}_2) \equiv V_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty} \frac{\rho_1}{r_{12}}\, d\tau_1 \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty} \frac{\rho(\vec{r}_1)\, d\tau_1}{r_{12}} \qquad \text{[A.II.34]}$$

avendo definito $r_{12} \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ come distanza fra punto campo e punto sorgente.

2) Se è noto $\vec{E}$ anziché ρ, il modo di invertire la relazione [A.II.32] è quello di realizzare che il differenziale totale di una generica funzione scalare f può essere scritto come:

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

Pertanto moltiplicando scalarmente ambo i membri della [A.II.32] per $d\vec{r}$, si ha:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = -dV$$

e, integrando fra due punti qualunque, si ottiene:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_a^b dV = V_a - V_b \qquad \text{[A.II.35]}$$

relazione che fornisce V a partire da $\vec{E}$.

Proprietà dei campi irrotazionali

1) L'eq. [A.II.35] mostra inoltre come il valore dell'integrale di linea non dipenda dal percorso, ma solo dal valore di V in a e b. Quindi indicanco con γ_1 e γ_2 due distinti percorsi colleganti i punti a e b, si ha l'ulteriore relazione:

$$\int_{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad [\gamma_1 \cup \gamma_2 = \text{curva chiusa}]$$

o, equivalentemente:

2) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ [per ogni curva chiusa semplice e riducibile].

E cioè la circuitazione di un campo conservativo lungo una linea semplice, chiusa e riducibile è sempre nulla. La riducibilità della curva, nelle relazioni non locali, così come la semplice connessione di R, nelle relazioni locali rende ciascuna delle equazioni riportate condizione necessaria e sufficiente per la conservatività del campo e ciascuna di queste relazioni perfettamente equivalente ad ognuna delle altre.

Teorema di Gauss

Abbiamo supposto che:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \,,$$

pertanto, integrando su un volume semplicemente connesso τ, si ha:

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau = \int_\tau \rho \, d\tau$$

che, dopo l'applicazione del teorema della divergenza, diventa:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho \, d\tau \equiv Q_{\text{int}}$$

E cioè, il flusso del campo attraverso una qualunque superficie semplice e chiusa S, è sempre uguale alle intensità delle sorgenti contenute in S.

Campi centrali e solenoidalità 4

Indaghiamo ora sulla solenoidalità dei campi centrali. Vediamo cioè sotto quali condizioni si verifica:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

Si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot (f(r)\, \vec{r}) = \partial_i\, (f(r)\, r_i) = r_i f'(r)\, r_i / r + f(r)\, \partial_i r_i = r f'(r) + 3 f(r) \,,$$

$$r \frac{df}{dr} + 3f = 0$$

espressione in generale diversa da zero.

Integrandola (per separazione delle variabili) si ha immediatamente, per $r \neq 0$:

$$\frac{df}{f} = -\frac{3}{r}\, dr$$

$$f(r) = \text{cost} / r^3$$

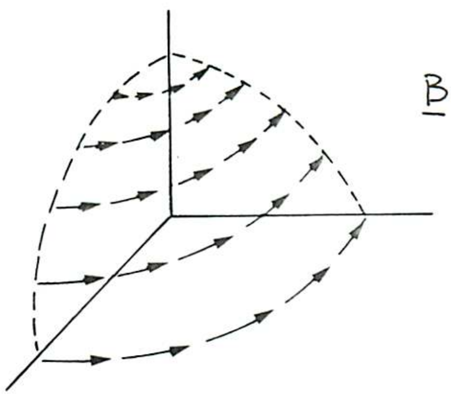
$$\ln f = -3 \ln r + \text{cost}$$

$$f = \frac{\text{cost}}{r^3}$$

il che dimostra che un campo centrale solo se va all'infinito come r^{-2} risulta solenoidale in tutto lo spazio tranne l'origine.

Campi azimutali 5

Ogni campo sferico-tangenziale a simmetria circolare (campo azimutale) (vedi figura) è solenoidale in tutto lo spazio.



$$\underline{B} = \underline{k} \times f(r)\, \underline{r}$$

Fig. 37

azimutale → solenoidale

↛ conservativo

Ciò significa, localmente, che la divergenza del campo è ovunque nulla. Infatti, indicando il generico campo azimutale con:

$$\vec{B} = \vec{k} \times f(r)\,\vec{r}$$

essendo $\vec{k}$ un vettore costante, si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{k} \times f(r)\,\vec{r}) \doteq \partial_i\,(\varepsilon_{ilm}\,k_l f(r)\,r_m) =$$

$$= \varepsilon_{ilm}\,k_l\,\partial_i\,(f(r)\,r_m) = \varepsilon_{ilm}\,k_l \left\{ \frac{f'(r)}{r}\,r_i r_m + f(r)\,\delta_{im} \right\} . = 0$$

Questa espressione è identicamente nulla: il primo addendo per l'indistinguibilità dei due operandi [A.II.29], ed il secondo addendo perché la delta di Kronecker impone l'uguaglianza di due indici nel simbolo di Levi-Civita.

Campi solenoidali 2

definizione

Un campo vettoriale $\vec{B}$ è solenoidale in R se, in tutti i punti del dominio semplicemente connesso R, vale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Potenziale vettore

Si è mostrato [A.II.18] come la divergenza del rotore di un qualunque campo vettoriale $\vec{A}$ sia identicamente nulla:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

È possibile pertanto associare ad ogni campo solenoidale $\vec{B}$ un campo vettoriale $\vec{A}$, tale che:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} . \qquad \text{[A.II.40]}$$

Il campo $\vec{A}$ prende il nome di potenziale vettore del campo $\vec{B}$. Come si vede ad un assegnato campo solenoidale $\vec{B}$ sono associati infiniti potenziali vettori. Infatti se $\vec{A}$ è un potenziale vettore, anche

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

risulta essere un potenziale vettore di $\vec{B}$.

Per ricavare un potenziale vettore da un assegnato campo vettoriale è necessario invertire la relazione [A.II.40].

È possibile seguire un procedimento analogo a quello indicato nel caso del potenziale scalare. Infatti, se il campo considerato non è anche irrotazionale ($\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\emptyset}$) oltre che solenoidale, il suo rotore sarà pari ad una qualche funzione vettoriale $\vec{J}$, sarà cioè:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J}$$

e poiché $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ si ha:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{lapl} \vec{A} = -\operatorname{lapl} \vec{A}$$

o ciò che è lo stesso:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

avendo scelto un potenziale a sua volta solenoidale (Gauge di Coulomb)[1]. E in definitiva:

$$\vec{\nabla}^2 A = -\vec{J} \qquad \text{[Equazione di Poisson]}$$

Come si sa una equazione vettoriale equivale ad un sistema di tre equazioni scalari indipendenti, conseguentemente la soluzione della equazione vettoriale di Poisson è, se soddisfatte le condizioni già menzionate, formalmente identica alla soluzione della corrispondente equazione scalare [A.II.24]. Si ha pertanto:

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty} d\tau_1\, \vec{J}_1 / r_{12}$$

avendo indicato con 1 il punto sorgente e con 2 il punto campo. La relazione appena trovata è la relazione inversa della [A.II.40].

Questa espressione consente di ricavare immediatamente una relazione non locale per il campo $\vec{B}$. Infatti, si ha:

$$\vec{B}_2 = \vec{\nabla}_2 \times \vec{A}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty} \vec{\nabla}_2 \times \left(\frac{\vec{J}_1}{r_{12}}\right) d\tau_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty} \vec{\nabla}_2 \left(\frac{1}{r_{12}}\right) \times \vec{J}_1\, d\tau_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty} \frac{\vec{J}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}\, d\tau_1$$

in quanto $\vec{\nabla}_2 \times \vec{J}_1 = \vec{\emptyset}$.

Indicando il termine $\vec{J}_1\, d\tau_1$ con $d\vec{k}_1$ si ha:

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty} \frac{d\vec{k}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Da questa relazione è evidente che il campo totale $\vec{B}$ può essere visto come la sovrapposizione di infiniti campi elementari, di valore:

$$d\vec{B}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{k}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \qquad \left.\right\} \text{Legge elementare di Laplace}$$

Se, in particolare, le sorgenti $\vec{J}_1\, d\tau_1$ hanno struttura monodimensionale (filiforme), allora la loro intensità si può esprimere come $i\, d\vec{r}_1$, e la legge elementare di Laplace, diventa:

$$d\vec{B}_2 = \frac{i}{4\pi}\frac{d\vec{r}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Proprietà dei campi solenoidali

1. Il flusso del campo attraverso una superficie chiusa è sempre nullo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \emptyset$$

[1] Si dice che si è scelta la gauge di Coulomb quando si impone al potenziale vettore $\vec{A}$ la relazione $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Una tale scelta è sempre possibile poiché, come si sa un potenziale vettore è sempre definito a meno del gradiente di una funzione arbitraria.

2. Il flusso attraverso una superficie semplicemente connessa non dipende dalla superficie, ma solo dalla curva su cui questa superficie insiste.

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 \qquad [S_1 \cup S_2 \equiv \text{Sup. chiusa}]$$

3. Il flusso del campo attraverso una superficie semplicemente connessa è uguale alla circuitazione del potenziale vettore lungo la curva su cui la superficie insiste.

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Teorema d'Ampere

Abbiamo supposto che:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J}$$

pertanto calcolandone il flusso attraverso una superficie S (semplicemente connessa) avente γ come curva di contorno, si ha:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

che, per il teorema di Stokes, diventa:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = i_{\text{conc.}}$$

Campi azimutali e irrotazionalità 6

Indaghiamo ora sulla irrotazionalità dei campi azimutali. Vediamo cioè sotto quali condizioni si verifica:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{k} \times f(r)\, \vec{r}) &= \varepsilon_{slm}\, \hat{e}_s \partial_l\, (\vec{k} \times f(r)\, \vec{r})_m = \\
&= \varepsilon_{slm}\, \varepsilon_{mqt}\, \hat{e}_s k_q \partial_l\, (f(r)\, r_t) = \\
&= (\delta_{sq}\delta_{lt} - \delta_{st}\delta_{lq})\, \hat{e}_s k_q \left(f(r)\, \delta_{lt} + r_t \frac{f'(r)}{r} r_l \right) = \\
&= \hat{e}_q k_q f(r)\, \delta_{tt} + \hat{e}_q k_q r_t r_t \frac{f'(r)}{r} - \hat{e}_t k_q f(r)\, \delta_{qt} + - \hat{e}_t k_q r_t \frac{f'(r)}{r} r_q \doteqdot \\
&\doteqdot \vec{k} 3 f(r) + \vec{k} r f'(r) - \vec{k} f(r) - \vec{r}(\vec{k} \cdot \vec{r}) \frac{f'(r)}{r} = \\
&= r f'(r)\, \vec{k} + 2 f(r)\, \vec{k} - \vec{r}(\vec{k} \cdot \vec{r}) \frac{f'(r)}{r}.
\end{aligned}$$

In generale $\neq 0$.

per $f(r) = \text{cost}$ $\quad \underline{\nabla} \times \underline{B} = 2 f \underline{k}$ (significato geometrico del rotore)

Se assumiamo per $f(r)$ la dipendenza funzionale suggerita dalla legge elementare di Laplace ($f(r) = 1/r^3$), si ha:

$$\text{rot}\,\vec{B} = (3\,\vec{r}\,(\vec{k}\cdot\vec{r}) - \vec{k}\,r^2)/r^5 \equiv \vec{C}$$

Campo di un dipolo di momento $\vec{k}$. Si vede così che:

$$\vec{B} = \vec{k} \times \vec{r}/r^3$$

è un potenziale vettore di $\vec{C}$.

per $f(r) = \frac{1}{r^3}$ $\qquad \underline{\nabla} \times \underline{B} = -\frac{3}{r^3}\,\bar{k} + \frac{2}{r^3}\,\bar{k} + \bar{r}(\bar{k}\cdot\bar{r})\,\frac{3}{r^5} =$

$$= \frac{3\,\bar{r}(\bar{k}\cdot\bar{r}) - r^2\bar{k}}{r^5}$$

Campi conservativi : $\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} V \qquad V \to V + \text{cost}$$

$$\int_{\gamma \text{ chiusa}} \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0 = \int_{\sigma} \underline{\nabla} \times \underline{E} \cdot \hat{n} d\sigma \quad \text{(Stokes)}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

se $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho \qquad \nabla^2 V = -\rho$ (Poisson)

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\underline{y})}{|\underline{x} - \underline{y}|} d^3 y$$

$$\int_{\sigma \text{ chiusa}} \underline{E} \cdot \hat{n} d\sigma = \int_{\tau} \underline{\nabla} \cdot \underline{E} \, d\tau = \int_{\tau} \rho \, d\tau \quad \text{(Gauss)}$$

Campi solenoidali : $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \qquad \underline{A} \to \underline{A} + \nabla \phi + \text{cost}$$

$$\int_{\sigma \text{ chiusa}} \underline{B} \cdot \hat{n} d\sigma = 0 = \int_{\tau} \underline{\nabla} \cdot \underline{B} \, d\tau \quad \text{(Gauss)}$$

se $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \underline{j} \qquad \nabla^2 \underline{A} = -\underline{j}$ ($\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$ Coulomb)

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{y})}{|\underline{x} - \underline{y}|} d^3 y$$

$$\int_{\gamma \text{ chiusa}} \underline{B} \cdot d\underline{l} = \int_{\sigma} \underline{\nabla} \times \underline{B} \cdot \hat{n} d\sigma = \int_{\sigma} \underline{J} \cdot \hat{n} d\sigma \quad \text{(Stokes)}$$

---

campi centrali : $\underline{E} = f(r) \underline{r}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0 \iff f(r) = \frac{1}{r^3}$$

campi azimutali : $\underline{B} = \underline{k} \times f(r) \underline{r}$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = 0 \iff r f'(r) \underline{k} + 2 f(r) \underline{k} - \underline{r} (\underline{k} \cdot \underline{r}) \frac{f'(r)}{r} = 0$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ ? & r = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\underline{r})$$

$$\rho(\underline{r}) = q \delta(\underline{r})$$

$$\begin{cases} \nabla^2 V(\underline{r}) = \nabla^2 \frac{1}{4\pi} \int \frac{q \delta(\underline{r}')}{|\underline{r}' - \underline{r}|} d^3 r' = \nabla^2 \frac{q}{4\pi} \frac{1}{|\underline{r}|} \\ \nabla^2 V(\underline{r}) = -q \delta(\underline{r}) \end{cases}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\underline{r})$$