

**PROBLEMA
GENERALE
DELL' ELETTROSTATICA
NEL VUOTO**

Electrostatic without boundary conditions

(1)

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0 \end{cases} \iff \underline{E} = -\underline{\nabla} V$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = -\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Poisson Eq.} \\ \text{if } \int \rho(\underline{x}) d^3x \text{ exists, i.e. } \rho \text{ vanishes} \\ \text{not quickly than } \frac{1}{r^2} \end{array} \right.$$

$$\text{solution: } V(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'$$

proof:

$$V(\underline{x}) \rightarrow V_\omega(\underline{x}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{x}')}{\sqrt{(\underline{x} - \underline{x}')^2 + \omega^2}} d^3x' \quad \text{with } \omega \text{ small}$$

$$\nabla_{\underline{x}}^2 V_\omega(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\underline{x}') \nabla_{\underline{x}-\underline{x}'}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + \omega^2}} \right) d^3x' = \xrightarrow{\text{see over}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\underline{x}') \nabla_{\underline{x}-\underline{x}'}^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3x'$$

$r \equiv |\underline{x} - \underline{x}'|$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\underline{x}') \frac{3\omega^2}{(r^2 + \omega^2)^{5/2}} d^3x' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\underline{x}' - \underline{x}| < R} \rho(\underline{x}') \frac{3\omega^2}{(r^2 + \omega^2)^{5/2}} d^3x' -$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\underline{x}' - \underline{x}| > R} \rho(\underline{x}') \frac{3\omega^2}{(r^2 + \omega^2)^{5/2}} d^3x' =$$

$$\nabla_{x-x'}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{-r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \left\{ -\frac{3r^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{3r^4}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right\} =$$

$$= \frac{-3(r^2 + a^2) + 3r^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = -\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}$$

(2)

- choose R so that $\rho(\underline{x}') = \rho(\underline{x}) + O(R)$ when $|\underline{x}' - \underline{x}| < R$

- since $\int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'$ exists

~~$\rho(\underline{x}')$ vanishes more quickly than $\frac{1}{r^2}$~~

$\int_{|\underline{x} - \underline{x}'| > R}$ exists ^{too} and is $O(a^2)$

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{x}}^2 V_a(\underline{x}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\underline{x}) \int_0^R \frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} 4\pi r^2 dr + O(a^2) \\ &= -\frac{\rho(\underline{x})}{\epsilon_0} \frac{(R/a)^3}{[1 + (R/a)^2]^{3/2}} + O(a^2) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{see over}}$$

taking the limit $a \rightarrow 0$

$$\nabla^2 V(\underline{x}) = -\frac{\rho(\underline{x})}{\epsilon_0}$$

Problem: we know that for a point charge q in \underline{x}_0 $V(\underline{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x} - \underline{x}_0|}$
what is the charge density for the point charge?

$$\rho(\underline{x}) = -\epsilon_0 \nabla^2 V(\underline{x}) = -\frac{q}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} = -\frac{q}{4\pi} \begin{cases} 0 & \underline{x} \neq \underline{x}_0 \\ ? & \underline{x} = \underline{x}_0 \end{cases}$$

$$\int_V \rho(\underline{x}) d^3x = q \quad \text{for each } V \text{ containing } \underline{x}_0$$

$$\int_0^R \frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} 4\pi r^2 dr = \quad \frac{r}{a} = x$$

$$= \int_0^{\frac{R}{a}} \frac{3}{(1+x^2)^{5/2}} 4\pi x^2 dx = 3 \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{3} \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} \Bigg|_0^{\frac{R}{a}}$$

$$= 4\pi \frac{(R/a)^3}{[1+(R/a)^2]^{3/2}}$$

Dirac delta function

(3)

$$\delta_n(x - x_0) = \begin{cases} n & |x - x_0| < \frac{1}{2n} \\ 0 & |x - x_0| \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$$

$$x_0 \in [a, b] \quad I_n = \int_a^b f(x) \delta_n(x - x_0) dx = \int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} n f(x) dx = f(\bar{x})$$

$\bar{x} \in [x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n}]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = f(x_0)$$

es.: $f(x) = x^d$

$$I_n = \int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} n x^d dx = \frac{n}{d+1} x^{d+1} \Big|_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} =$$

$$= \frac{n}{d+1} \left[\left(x_0 + \frac{1}{2n}\right)^{d+1} - \left(x_0 - \frac{1}{2n}\right)^{d+1} \right] =$$

$$= \frac{n}{d+1} x_0^{d+1} \left[\left(1 + \frac{1}{2n x_0}\right)^{d+1} - \left(1 - \frac{1}{2n x_0}\right)^{d+1} \right] =$$

$$= \frac{n}{d+1} x_0^{d+1} \left[1 + \frac{d+1}{2n x_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + \frac{d+1}{2n x_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] =$$

$$= \frac{n}{d+1} x_0^{d+1} \left[\frac{d+1}{n x_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$= x_0^d + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

for a point charge q in x_0 .

$$\rho(\underline{x}) = q \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

infect

$$\begin{aligned} \bullet \quad V(\underline{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}' - \underline{x}|} d^3x' = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(\underline{x}' - \underline{x}_0)}{|\underline{x}' - \underline{x}|} d^3x' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x} - \underline{x}_0|} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \nabla^2 V(\underline{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} =$$

$$= - \frac{\rho(\underline{x})}{\epsilon_0} = - \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

then $\nabla^2 \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} = -4\pi \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\underline{r})}$$

Il potenziale di un atomo neutro di H è

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) \quad \text{dove } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{2} a_0 \quad a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m.} \quad \text{Trova la densità di carica.}$$

Dall'eq. di Poisson:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= -\epsilon_0 \nabla^2 V(r) = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \nabla^2 \left[e^{-\alpha r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

la funzione di cui occorre calcolare il laplaciano è singolare!

$$\begin{aligned} \nabla^2(pg) &= \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}(pg) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}p g + p \underline{\nabla}g) = \\ &= \nabla^2 p g + p \nabla^2 g + 2 \underline{\nabla}p \cdot \underline{\nabla}g \end{aligned}$$

e usando coordinate polari in cui

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\rho(r) = -\frac{e}{4\pi} \left\{ \nabla^2 (e^{-\alpha r}) \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) + e^{-\alpha r} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) \right.$$

$$\left. + 2 \nabla (e^{-\alpha r}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) \right\} =$$

$$= -\frac{e}{4\pi} \left\{ \left(-\frac{2\alpha}{r} + \alpha^2 \right) e^{-\alpha r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) + e^{-\alpha r} \left(-4\pi \delta(r) \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \left(-\alpha e^{-\alpha r} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right\} =$$

$$= e \delta(r) e^{-\alpha r} - \frac{e}{4\pi} e^{-\alpha r} \left\{ -\frac{2\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} - \frac{\alpha^2}{r} + \frac{\alpha^3}{2} + \frac{2\alpha}{r^2} \right\}$$

$$= e \delta(r) - \frac{e\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}$$

la carica totale dell'atomo \bar{e} nulla:

$$\int \rho(r) d^3r = e - \int_0^{\infty} \frac{e\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r} 4\pi r^2 dr =$$

$$= e - \frac{e}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} x^2 dx =$$

$$= e - e = 0$$

Electrostatic with boundary conditions.

(4)

• Green's identities

from divergence theorem
$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{A} d^3x = \int_S \underline{A} \cdot \underline{n} dS$$

let $\underline{A} = \phi \underline{\nabla} \psi$

$$\underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{\nabla} \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \underline{\nabla} \phi \cdot \underline{\nabla} \psi$$

$$\phi \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

then

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \underline{\nabla} \phi \cdot \underline{\nabla} \psi) d^3x = \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

changing $\phi \leftrightarrow \psi$

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{\nabla} \phi) d^3x = \int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

subtracting

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \int_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

choose $\psi = \frac{1}{4\pi R} \equiv \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'| 4\pi}$ and $\phi = V$

$$\nabla^2 \phi = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \frac{1/4\pi}{R} = - \delta(\underline{x} - \underline{x}')$$

$$\int_V \left[-V(\underline{x}') \delta(\underline{x} - \underline{x}') + \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \frac{\rho(\underline{x}')}{\epsilon_0} \right] d^3 x' =$$

$$= \int_S \left[V \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \right) - \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \frac{\partial}{\partial n'} V \right] ds'$$

$$\bullet \quad V(\underline{x}) = \int_V \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3 x' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \frac{\partial V(\underline{x}')}{\partial n'} - V(\underline{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) \right] ds'$$

this is an integral statement

in general the ^{orbital} specification of $V(\underline{x})$ and $\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial n}$ on S

(Cauchy boundary conditions) is an overspecification

appropriate boundary conditions are

1) $V(x)$ on S (Dirichlet boundary condition) or

2) $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$ on S (Neumann boundary condition) or

3) mixed in S_1 and S_2 with $S = S_1 \cup S_2$

- In the case 1) and 2) (or 3)) the solution of the Poisson equation is unique.

Let V_1 and V_2 be two solutions and $u = V_1 - V_2$ ($u=0$ on S)

$\nabla^2 u = 0$ inside S ~~$\nabla^2 u = 0$ inside S~~

$$\int_V (u \nabla^2 u + \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} u) d^3x = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$\int_V |\underline{\nabla} u|^2 d^3x = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} u = 0 \text{ inside } S$$

i.e. $u = \text{constant}$ inside S

in the case 1) $V_1 = V_2$

in the case 2) $V_1 = V_2 + \text{constant}$

• if in V $\nabla^2 V(\underline{x}) = 0 \Rightarrow \int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0$

proof:

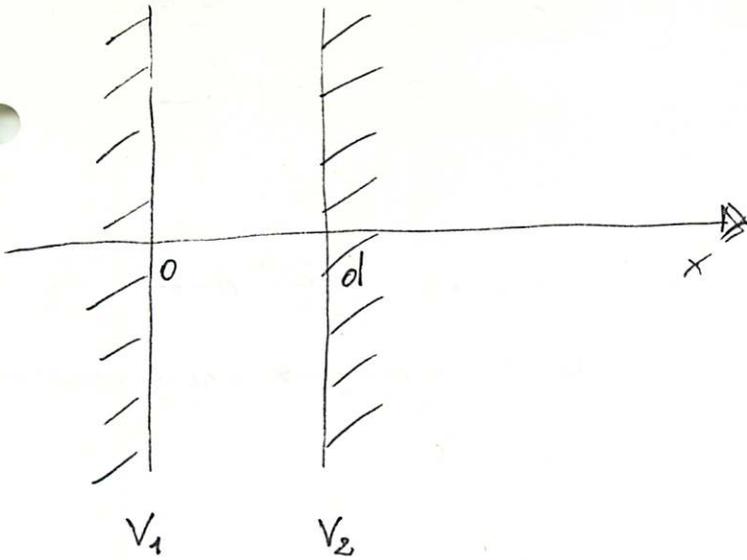
$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int_S \underline{\nabla} V \cdot \underline{n} dS = \int_V \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} V) d^3x =$$

$$= \int_V \nabla^2 V d^3x = 0$$

the total charge on S must be zero!

$$\sigma(\underline{x}) = \frac{E_n(\underline{x})}{\epsilon_0} = -\frac{\underline{\nabla} V(\underline{x}) \cdot \underline{\hat{n}}}{\epsilon_0}$$

Problema di Dirichlet ⑥
unidimensionale



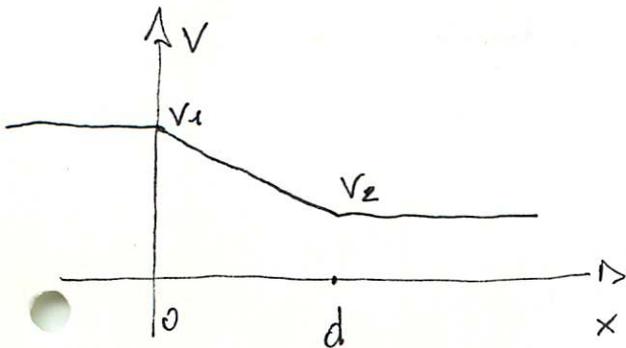
$$\begin{cases} V(0, y, z) = V_1 & V(d, y, z) = V_2 \\ \nabla^2 V(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$V(x, y, z) = V(x) \quad \frac{d^2}{dx^2} V(x) = 0 \quad V(x) = A + Bx$$

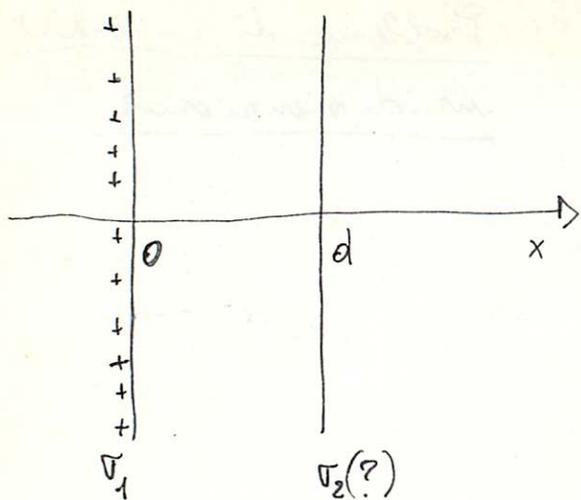
$$V(0) = A = V_1 \quad V(d) = A + Bd = V_2 \quad B = \frac{V_2 - V_1}{d}$$

$$V(x) = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{x}{d}$$

$V(x)$ è completamente determinato



problema di Neumann unidimensionale



dovendo essere $\int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0$ la densità σ_2 non può essere arbitraria ma $\sigma_2 = -\sigma_1$

$$\sigma = \frac{E_n}{\epsilon_0} \quad E_n = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ in 1}$$

$$E_n = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ in 2}$$

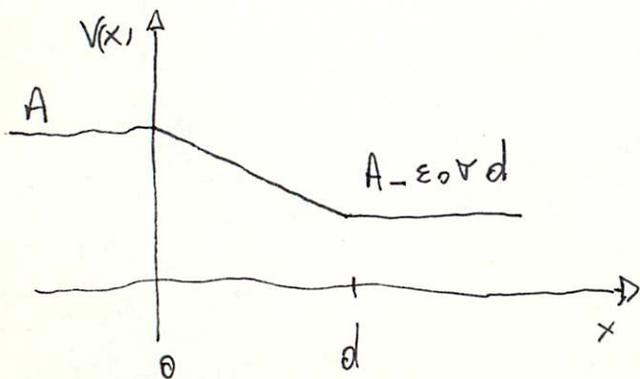
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x}(0, y, z) = -\sigma_1 \epsilon_0 \quad \frac{\partial V}{\partial x}(d, y, z) = +\epsilon_0 \sigma_2 \\ \nabla^2 V(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

$$V(x, y, z) = V(x) \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = 0 \quad V(x) = A + Bx$$

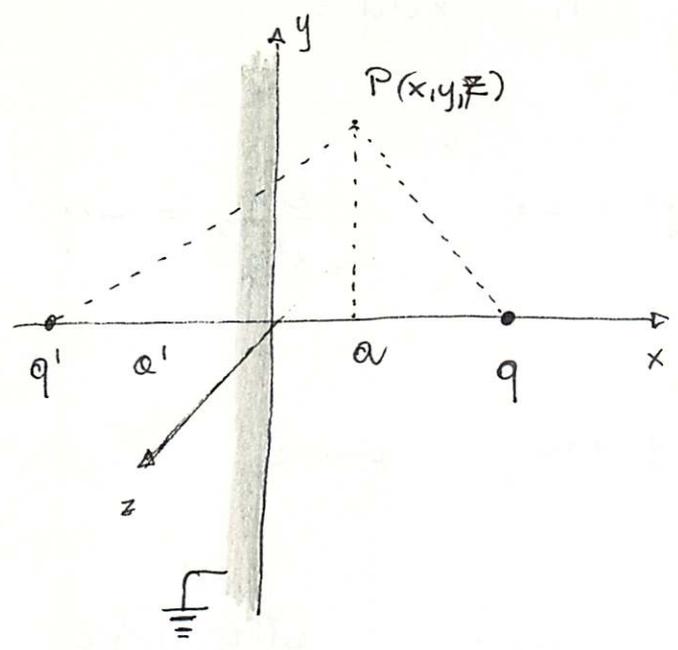
$$\frac{\partial V}{\partial x} = B \quad -\sigma_1 \epsilon_0 = B = \sigma_2 \epsilon_0 \quad \text{condizione} \Leftrightarrow -\sigma_1 = \sigma_2$$

$$\sigma_1 = \sigma \quad \sigma_2 = -\sigma \quad V(x) = A - \epsilon_0 \sigma x$$

$V(x)$ è determinata a meno di una costante



point charge in the presence of a conducting grounded plane



$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(a'+x)^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

when $x=0$

$$V(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{a'^2 + y^2 + z^2}} \right) = 0$$

if $q' = -q$ $a' = a$

$$\sigma(r) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{2\epsilon_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{a}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$r \equiv \sqrt{y^2 + z^2}$$

induced total charge = $\int_0^{\infty} \sigma(r) 2\pi r dr =$

$$= -q \int_0^{\infty} \frac{q}{(a^2 + r^2)^{3/2}} r dr = -q \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^{3/2}} = -q$$

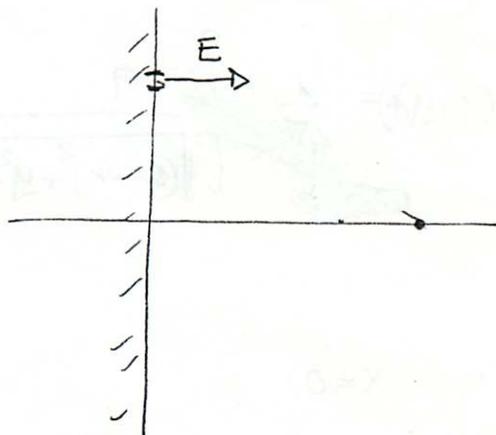
force between the charge q and the plane

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a+a')^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \quad \text{attractive}$$

alternatively

$$dF = \frac{1}{2} E dq =$$

$$= \frac{\sigma(r)}{\epsilon_0} \cdot 2\pi r \sigma(r) dr$$

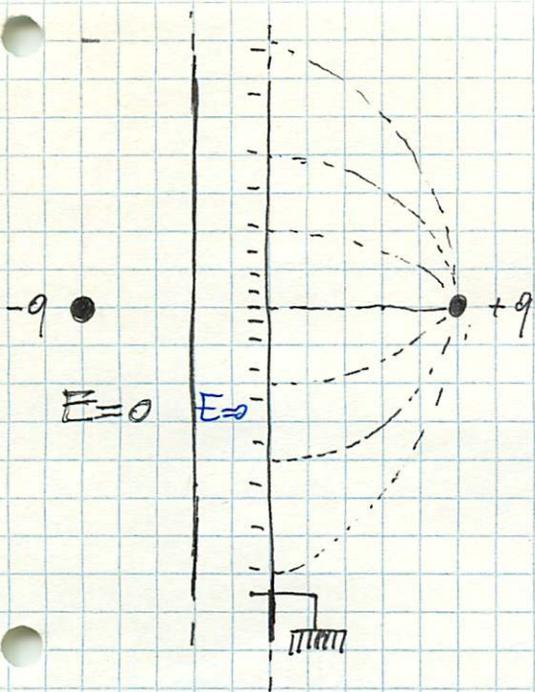


$$F = \int_0^{\infty} \frac{dr 2\pi r}{2\epsilon_0} \frac{q^2}{4\pi^2 (a^2 + r^2)^3} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^3} dz =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2}$$

$$F = \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q 2\pi r dr \sigma(r)}{r^2 + a^2} \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \dots$$



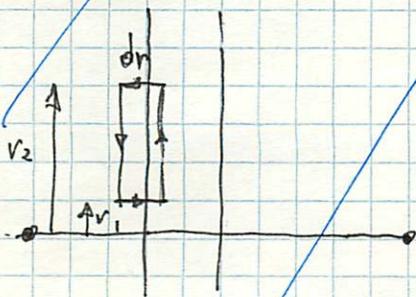
N.B.

La soluzione ottenuta con le cariche immagine è valida nella regione di spazio che non contiene tali cariche: infatti deve essere $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ dove ρ è la densità delle cariche vere

Se il piano metallico è messo a terra nel semispazio ^{e all'intorno del metallo} il campo elettrico è nullo e nulla è la densità di carica sulla superficie della parte della carica immagine.

Per motivi di simmetria tale campo elettrico ~~deve~~ dipendere dalle distanze dall'axe $+q -q$ e deve essere $E(r) \rightarrow 0$ _{$r \rightarrow \infty$}

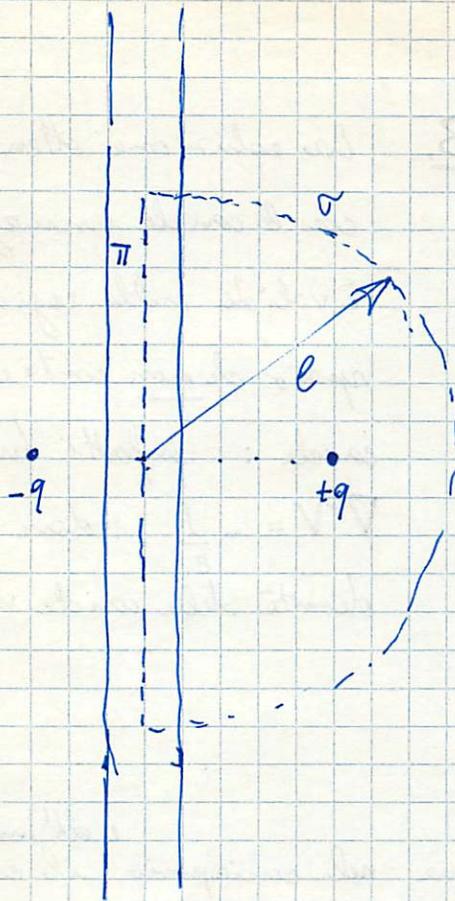
In prossimità della superficie inoltre E è perpendicolare ad metallo



$$0 = \oint \underline{E} \cdot d\underline{e} = [E(r_2) - E(r_1)] A \Rightarrow E(r_2) = E(r_1) = E(\infty) = 0$$

Per il Teorema di Gauss: $\oint \underline{E} \cdot d\underline{e} = 0 = \frac{\sigma(r) 2\pi r dr}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = 0$

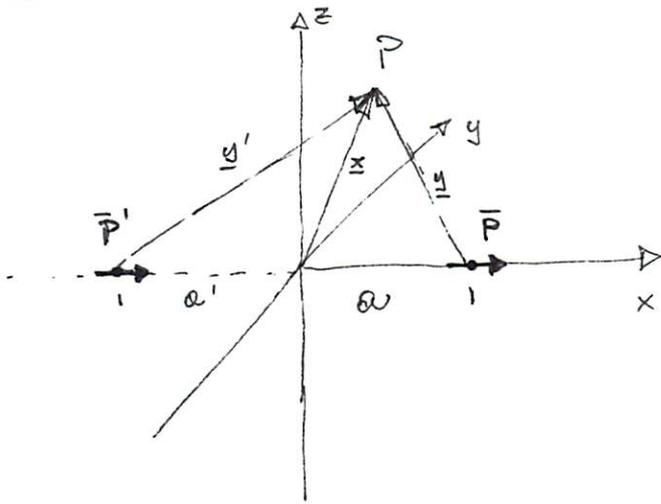
Per il Teorema di Coulomb: $\sigma = \epsilon_0 E = 0$



$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\text{GUTC}} \hat{E} \cdot \hat{n} \, ds = 0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\text{top}} \hat{E} \cdot \hat{n} \, ds + \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\text{bottom}} \hat{E} \cdot \hat{n} \, ds$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\text{top}} \hat{E} \cdot \hat{n} \, ds = 0 = \int_0^{\infty} E(r) 2\pi r \, dr \Rightarrow E(r) = 0$$

dipole in the presence of a conducting grounded plane



$$V(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\underline{P} \cdot \underline{y}}{y^3} + \frac{\underline{P}' \cdot \underline{y}'}{y'^3} \right\}$$

choose \underline{P}' and a' so that $V(0, y, z) = 0$

$$r \equiv \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$V(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-P a}{(a^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{P' a'}{(a'^2 + r^2)^{3/2}} \right\}$$

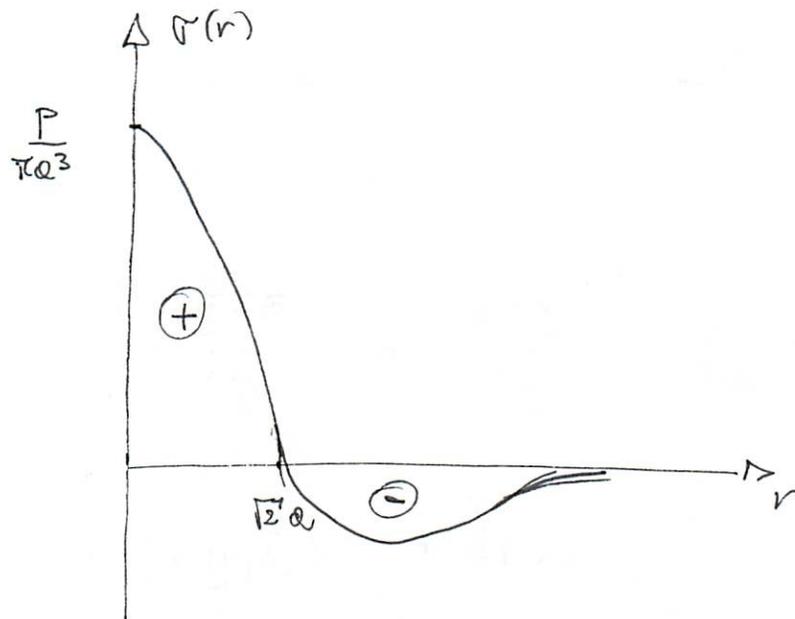
$$\begin{cases} \underline{P}' = \underline{P} \\ a' = a \end{cases}$$

$$V(x, y, z) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-(a-x)}{[(a-x)^2 + r^2]^{3/2}} + \frac{a+x}{[(a+x)^2 + r^2]^{3/2}} \right\}$$

induced charge density

$$\bullet \quad \sigma(r) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} =$$

$$= -\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{r^2 - 2a^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{P}{2\pi} \frac{2a^2 - r^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}}$$



• total induced charge

$$q = \int_0^{\infty} \sigma(r) 2\pi r dr = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2a^2 - r^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}} r dr =$$

$$= P \left\{ 2a^2 \cdot \left. \frac{-1/3}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \right|_0^{\infty} - \left[\left. \frac{-1/3 r^2}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \right|_0^{\infty} + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}} dr \right] \right\} =$$

$$= P \left\{ \frac{2}{3} \frac{1}{a} - \frac{2}{3} \frac{1}{a} \right\} = 0$$

• force

(9)

$$dF = E dq = \frac{\sigma(r)}{\epsilon_0} 2\pi r dr \sigma(r) = \frac{2\pi}{\epsilon_0} r(r)^2 r dr$$

$$F = \int_0^{\infty} \frac{2\pi}{\epsilon_0} \frac{p^2}{4\pi^2} \frac{(2a^2 - r^2)^2}{(a^2 + r^2)^5} r dr =$$

$$= \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 a^4} \int_0^{\infty} dx \frac{4x + x^5 - 4x^3}{(1+x^2)^5} =$$

$$= \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 a^4} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{4}{24} \right\} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 a^4} \cdot \frac{3}{8} ?$$

alternatively

$$U = - \frac{2 \cdot p \cdot p}{4\pi\epsilon_0 d^3} = \text{interaction energy}$$

$$F = F_x = - \left. \frac{\partial U}{\partial d} \right|_{d=2a} = \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{-3}{d^4} \right|_{d=2a} =$$

$$= -\frac{3}{8} \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 a^4} \quad \text{attractive}$$

$$V(r) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ q\delta = p}} \left\{ \frac{q}{2\pi} \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{q}{2\pi} \frac{(a+\delta)}{[(a+\delta)^2 + r^2]^{3/2}} \right\}$$

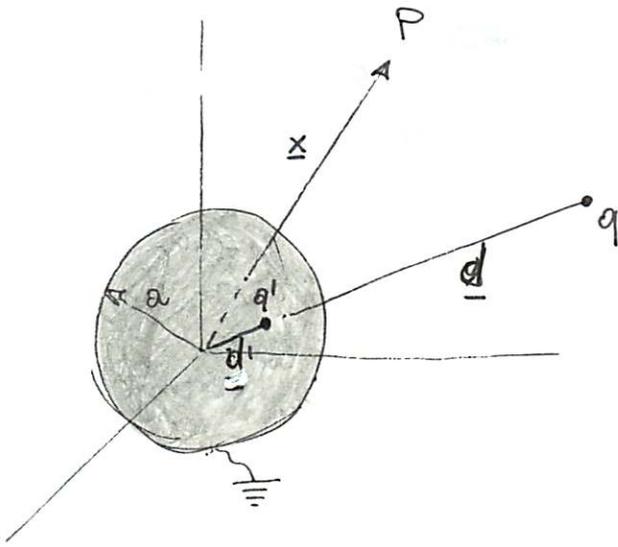
$$= \left\{ \dots \right\}_{\delta=0} + \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \dots \right\} \Big|_{\delta=0} \delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$= \frac{q}{2\pi} \delta \frac{2a^2 - r^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{p}{2\pi} \frac{2a^2 - r^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}}$$

i.e. The induced charge density can be obtained on that induced by a couple of opposite charges in the limit $\delta \rightarrow 0$ $q\delta = p$, δ being the relative distance.

(10)

Point charge in the presence of a grounded conducting sphere.



$$d \geq a$$

$$4\pi\epsilon_0 V(\underline{x}) = \frac{q}{|\underline{x} - \underline{d}|} + \frac{q'}{|\underline{x} - \underline{d}'|}$$

choose q' and $|\underline{d}'|$ so that $V(|\underline{x}| = a) = 0$

$$4\pi\epsilon_0 V(|\underline{x}| = a) = \frac{q}{a \left| \hat{x} - \frac{d}{a} \hat{d}' \right|} + \frac{q'}{d' \left| -\hat{d}' + \frac{a}{d'} \hat{x} \right|} =$$

$$= \frac{q/a}{1 + \frac{d^2}{a^2} - 2\frac{d}{a} \cos \hat{x} \hat{d}'} + \frac{q'/d'}{1 + \frac{a^2}{d'^2} - 2\frac{a}{d'} \cos \hat{x} \hat{d}'}$$

$$\begin{cases} \frac{q}{a} = -\frac{q'}{d'} \\ \hat{d} = \hat{d}' \end{cases}$$

$$\begin{cases} q' = -\frac{a}{d} q \\ d' = \frac{a^2}{d} \end{cases}$$

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d'}$$

- intensity of the force between the charge q and the sphere

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d-d')^2} = - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ad}{(d^2 - a^2)^2} \quad \text{attractive!}$$

- induced charge density (on the sphere surface)

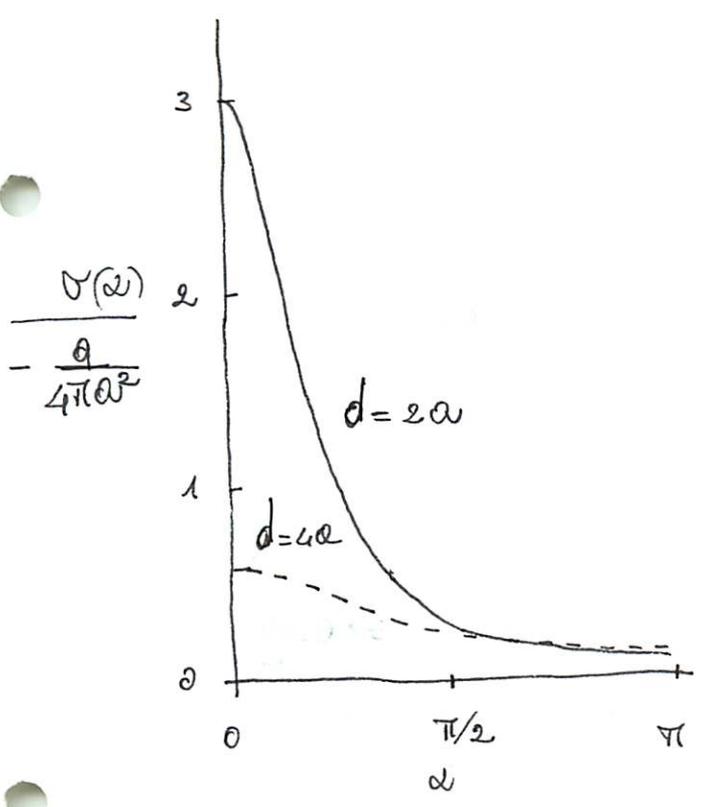
$$\sigma = \sqrt{\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}=a^+) \cdot \hat{\mathbf{x}}} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial |\mathbf{x}|} \right|_{|\mathbf{x}|=a} \quad (\cos\alpha \equiv \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{d}}')$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + d^2 - 2xd\cos\alpha}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + d'^2 - 2xd'\cos\alpha}} \right] \right|_{x=a}$$

$$= +\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q(a-d\cos\alpha)}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha)^{3/2}} + \frac{q'(a-d'\cos\alpha)}{(a^2 + d'^2 - 2ad'\cos\alpha)^{3/2}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{q(a-d\cos\alpha)}{d^3 \left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d}\cos\alpha\right)^{3/2}} - \frac{q \frac{a}{d} (a - \frac{a^2}{d^2}\cos\alpha)}{a^3 \left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d}\cos\alpha\right)^{3/2}} \right\}$$

$$= - \frac{q}{4\pi a^2} \frac{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \frac{a}{d}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d}\cos\alpha\right)^{3/2}}$$



• total induced charge

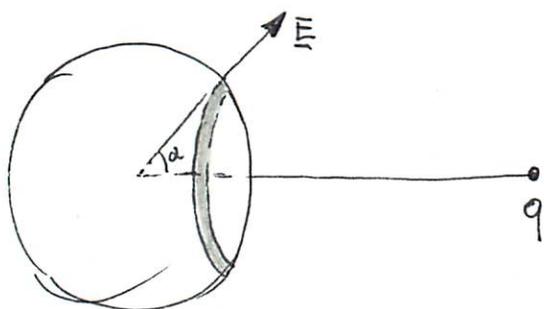
$$\int_S \sigma(\omega) dS = \int_0^\pi \sigma(\omega) \cdot 2\pi a \sin\omega \cdot a d\omega =$$

$$= \int_{-1}^1 2\pi a^2 dz \frac{-q}{4\pi a^2} \frac{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \frac{a}{d}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2 \frac{a}{d} z\right)^{3/2}} = (z = \cos\omega)$$

$$= -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \frac{\frac{a}{d}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2} - 2 \frac{a}{d} z}} \Bigg|_{-1}^1 = -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \left(\frac{1}{|1 - \frac{a}{d}|} - \frac{1}{|1 + \frac{a}{d}|} \right)$$

$$= -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \frac{2 \frac{a}{d}}{1 - \frac{a^2}{d^2}} = -q \frac{a}{d} = q'$$

- another way to calculate the force



$$dF = \frac{E}{2} dq' \cos \alpha = \frac{\sigma(\alpha) \cdot \sigma \cdot 2\pi a \sin \alpha \cdot a d\alpha \cos \alpha}{2\epsilon_0}$$

$$F = \int_0^\pi \sigma(\alpha)^2 \frac{2\pi a^2}{2\epsilon_0} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha =$$

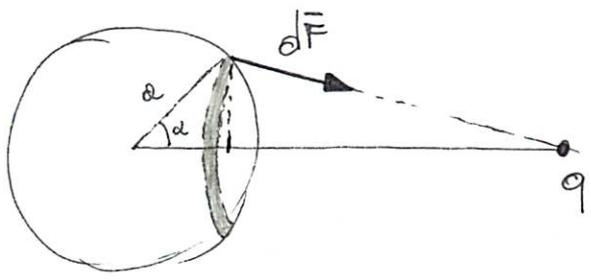
$$= \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{2\pi a^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2 \frac{a}{y} \int_{-1}^1 dz \frac{z \frac{a}{y}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2 \frac{a}{y} z\right)^3} =$$

$$= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0^2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2 \int_{-\frac{a}{y}}^{\frac{a}{y}} dt \frac{t}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2t\right)^3}$$

$$= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2 \frac{4 \frac{a^3}{y^3}}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^4} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\frac{a^3}{y^3}}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2}$$

• another way to calculate the force



$$dF = \frac{q \cdot 2\pi a \sin \alpha \cdot a d\alpha \cdot \sigma(a)}{4\pi\epsilon_0 \left[(y - a \cos \alpha)^2 + a^2 \sin^2 \alpha \right]} \cdot \frac{y - a \cos \alpha}{\sqrt{(y - a \cos \alpha)^2 + a^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 y^2} \frac{a}{y} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{\sin \alpha (1 - \frac{a}{y} \cos \alpha) d\alpha}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2 \frac{a}{y} \cos \alpha\right)^3}$$

$\cos \alpha = z$

$$F = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 y^2} \frac{a}{y} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \int_{-1}^1 \frac{\left(1 - \frac{a}{y} z\right) dz}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2 \frac{a}{y} z\right)^3} =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 y^2} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{y}\right)^4} - \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{y}\right)^4} \right] - \frac{2 \frac{a^3}{y^3}}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^4} \right\} =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 y^2} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{\cancel{2 \frac{a}{y}} + 2 \frac{a^3}{y^3} - \cancel{2 \frac{a^3}{y^3}}}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^4} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{\frac{q^3}{y^3}}{\left(1 - \frac{q^2}{y^2}\right)^4}$$

- when $y \leq a$ the image charge is outside the sphere $q' = -q \frac{a}{y}$ $d' = \frac{a^2}{y} > a$

$$\sigma(a) \rightarrow -\sigma(a) \quad \text{for} \quad \sigma = -\epsilon_0 E(r) = + \epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial |x|} \right|_{|x|=a} = \epsilon_0 E(a) \cdot (-\hat{x})$$

$$\text{total induced charge} = \int_S \sigma(a) dS =$$

$$= \frac{q}{\epsilon} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \left. \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2} - 2 \frac{a}{y} z}} \right|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{q}{\epsilon} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \left(\frac{1}{\left|1 - \frac{a}{y}\right|} - \frac{1}{\left|1 + \frac{a}{y}\right|} \right) = \frac{q}{\epsilon} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{\frac{a}{y} + 1 - \frac{a}{y} + 1}{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} = -q$$

when $y \leq a$

$$V(\infty) \rightarrow -V(\infty)$$

$$\text{total induced charge} = -q$$

Point charge in the presence of a charged insulated conducting sphere

If Q is the total charge on the sphere, and $y > a$
by linear superposition

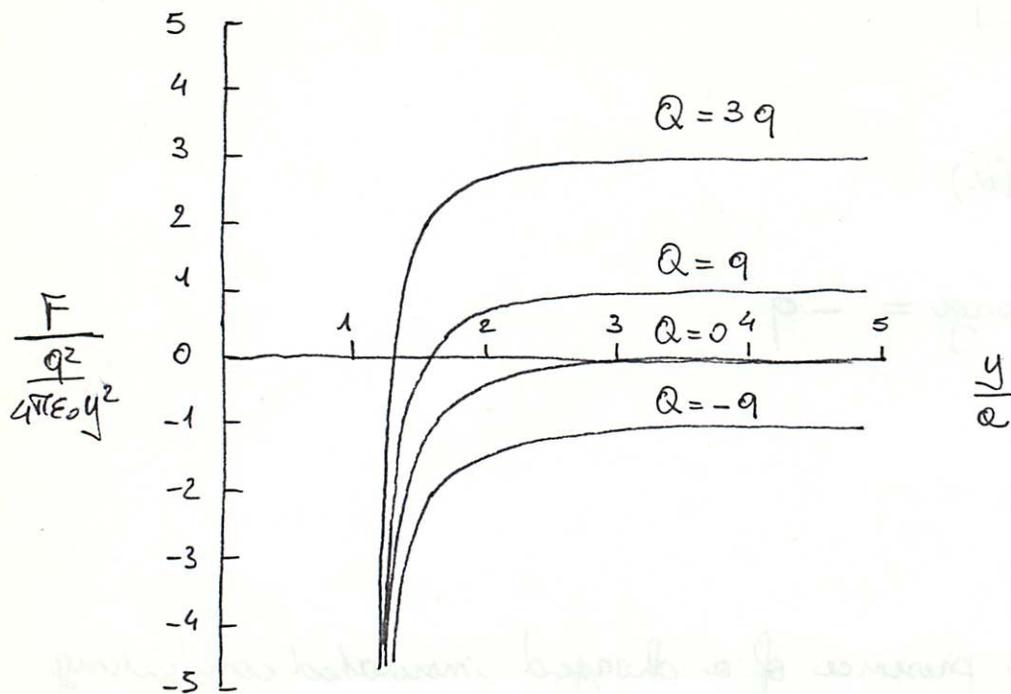
secondo conica immaginaria
real centro della sfera.

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\underline{x} - \underline{y}|} + \frac{q'}{|\underline{x} - \underline{y}'|} + \frac{Q - q'}{|\underline{x}|} \right\}$$

$$\begin{cases} q' = -\frac{a}{y} q \\ y' = \frac{a^2}{y} \end{cases}$$

if $y < a$ add the term
 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q+q}{|\underline{x}|}$
or in general $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - q_{\text{induced}}}{|\underline{x}|}$

$$\underline{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[Q - \frac{qa^3(2y^2 - a^2)}{y(y^2 - a^2)^2} \right] \hat{y}$$



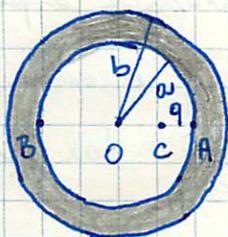
also when Q and q have the same sign, the force is attractive for $y \rightarrow a$

Point charge in the presence of conducting sphere at fixed potential

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|x-y|} + \frac{q'}{|x-y'|} + \frac{+4\pi\epsilon_0 V_0 a}{|x|} \right\}$$

$$\underline{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[V_0 a \frac{4\pi\epsilon_0 q a y^3}{(y^2 - a^2)^2} \right] \hat{y}$$

Una carica puntiforme $q = 3.6 \mu\text{C}$ si trova all'interno di una sfera cava conduttrice di raggio interno $a = 17.0 \text{ cm}$ e raggio esterno $b = 18.0 \text{ cm}$ a distanza $d = 11.0 \text{ cm}$ dal centro della sfera. La sfera è isolata ed elettricamente neutra. Si calcoli la densità di carica ^{di} superficiale indotta in ogni punto della superficie sferica esterna, il potenziale della sfera (assumendo nullo il potenziale all'infinito) e la densità di carica ^{di} superficiale indotta nei punti A e B della superficie sferica interna.



Sia C il punto dove è situata la carica q con $OC = d$

Il campo elettrico sulla superficie esterna della sfera metallica deve essere ortogonale alla superficie stessa; avendo questa raggio di curvatura costante il campo elettrico deve essere modulo costante (infatti usando coordinate sferiche per motivi di simmetria si deve avere $E = E(r, \theta)$, $E_{\text{tangente}} = \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ da cui per $r = b$ si deduce $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$).

Applicando il teorema di Gauss alla sfera di raggio b :

$$\oint (\underline{E}) = 4\pi b^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \underline{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \hat{r}$$

essendo \hat{r} il versore radiale. Per il teorema di Coulomb:

$$\sigma = \epsilon_0 \underline{E} \cdot \hat{r} = \frac{q}{4\pi b^2} = 8.8 \cdot 10^{-6} \text{ C m}^{-2}$$

Per $r \geq b$ si ha $\underline{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$ da cui

$$\begin{aligned} V(b) - V(\infty) &= - \int_{\infty}^b \underline{E}(r) \cdot \hat{r} dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^b \frac{dr}{r^2} \\ &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \end{aligned}$$

il potenziale della sfera cava è $V(b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} = 1.7 \cdot 10^5 \text{ V}$

Per $r \leq a$ il sistema della carica q e della sfera metallica è equivalente al sistema formato dalla carica q e dalla carica immagine $q' = -q \frac{a}{d}$ posta a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$ dal centro O nella direzione di OC

Nel punto A il campo elettrico vale

$$\underline{E}(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a-d)^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{a}{d}}{\left(\frac{a^2}{d} - a\right)^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 + \frac{d}{a}}{(a-d)^2} \hat{r}$$

$$\sigma(A) = \epsilon_0 \underline{E}(A) \cdot (-\hat{r}) = - \frac{q}{4\pi} \frac{1 + d/a}{(a-d)^2} = - 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ C m}^{-2}$$

Nel punto B si ha:

$$\underline{E}(B) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a+d)^2} \hat{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q a/d}{\left(a + \frac{a^2}{d}\right)^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - d/a}{(a+d)^2} \hat{r}$$

$$\sigma(B) = \epsilon_0 \underline{E}(B) \cdot (-\hat{r}) = - \frac{q}{4\pi} \frac{1 - d/a}{(a+d)^2} = - 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ C m}^{-2}$$

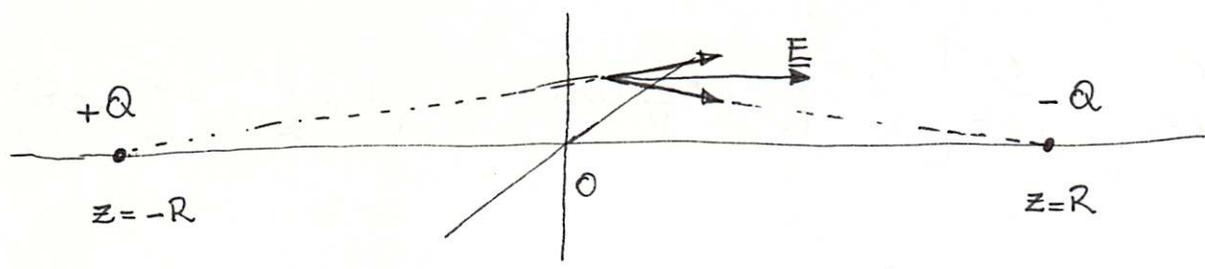
In un generico punto P tale che OP forma un angolo α con OA

$$\sigma(\alpha) = \frac{q}{4\pi a^2} \frac{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \frac{a}{d}}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2 \frac{a}{d} \cos \alpha\right)^{3/2}}$$

$$\sigma(O) = \sigma(A)$$

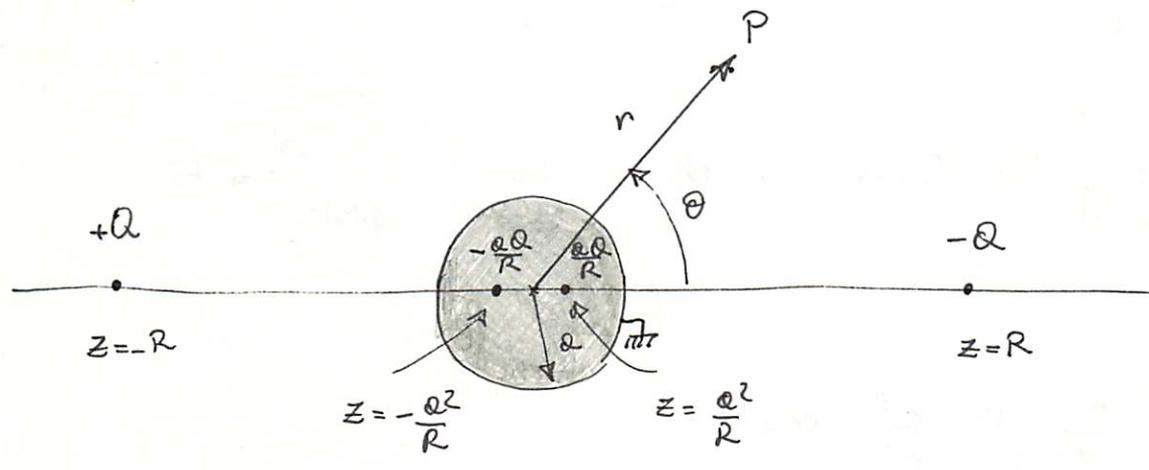
$$\sigma(\pi) = \sigma(B)$$

Conducting sphere in a uniform electric field



in a region small compared to R , the charges $\pm Q$ produce an approximately constant electric field $E = \frac{2Q}{R^2 4\pi\epsilon_0}$

In the limit $Q \rightarrow \infty$ $R \rightarrow \infty$ with $\frac{Q}{R^2}$ constant this approx. is exact.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{Q}{R}}{\left(r^2 + \frac{Q^2}{R^2} + 2\frac{Q^2}{R}r \cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{Q}{R}}{\left(r^2 + \frac{Q^2}{R^2} - 2\frac{Q^2}{R}r \cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

factoring out R and r

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{R} \left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2r}{R} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}} \right] - \frac{aQ}{rR} \left[\left(1 + \frac{a^4}{r^2R^2} + \frac{2a^2}{rR} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a^4}{r^2R^2} - \frac{2a^2}{rR} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{Q}{R^2} 2r \cos\theta + \frac{Q}{R^2} 2 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \right\} + \dots$$

taking the limit with $\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ a \rightarrow \infty}} \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = E$

$$V = -E \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta$$

$$= -E \cdot z + E \frac{a^3}{r^2} \cos\theta$$

= potential of the electric field + induced potential

- the induced potential is equivalent to that from a dipole of strength $p = 4\pi\epsilon_0 E a^3$
- induced surface charge density $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=a} = 3\epsilon_0 E \cos\theta$
- total induced charge = 0

Esempio 4.23

Dimostrare che, posto un dipolo di momento \mathbf{p} in un campo uniforme \mathbf{E}_0 , con \mathbf{p} parallelo e concorde a \mathbf{E}_0 , nel campo risultante esiste una superficie equipotenziale sferica con centro nel dipolo e calcolare il raggio di tale superficie e il potenziale che le compete. Applicare il risultato al caso di una sfera conduttrice scarica posta in un campo uniforme.

Soluzione

Prendiamo un asse z con origine nel centro del dipolo e orientato come \mathbf{p} e \mathbf{E}_0 . Il potenziale dovuto alla distribuzione di cariche che generano il campo uniforme è dato da (2.30), dove la costante è pari al valore V_0 nell'origine, il contributo del dipolo è (2.59). In un generico punto P

$$V(P) = V_0 - E_0 z + \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = V_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Se esiste una superficie sferica equipotenziale di raggio R centrato sul dipolo, nei suoi punti deve essere $V(P) = \text{costante}$ qualsiasi sia il valore di θ :

$$V_0 - \cos \theta \left(E_0 R - \frac{p}{4\pi \epsilon_0 R^2} \right) = \text{costante}$$

La condizione è soddisfatta se $R^3 = p / 4\pi \epsilon_0 E_0$ e il valore della costante è proprio V_0 . Pertanto nel campo elettrico risultante dalla somma di un campo uniforme \mathbf{E}_0 e di un campo di dipolo, con \mathbf{p} concorde a \mathbf{E}_0 , esiste una superficie sferica di raggio

$$R = \left(\frac{p}{4\pi \epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}$$

equipotenziale con valore V_0 uguale al potenziale del campo uniforme nella posizione in cui si trova il dipolo.

Il campo elettrostatico nei punti della superficie equipotenziale è radiale ed è dato dalla somma delle componenti radiali del campo di dipolo (2.60) e del campo uniforme:

$$\mathbf{E}(P) = \left(\frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^3} + E_0 \cos \theta \right) \mathbf{u}_r = 3E_0 \cos \theta \mathbf{u}_r$$

Quando mettiamo una sfera conduttrice scarica in un campo uniforme, la sua superficie deve essere equipotenziale; ma allora la situazione elettrostatica all'esterno della sfera si può calcolare supponendo di porre nel centro della sfera un *dipolo immagine* il cui momento è determinato dal raggio della sfera e dal valore del campo uniforme:

$$p = 4\pi \epsilon_0 R^3 E_0$$

Il campo elettrico all'esterno della sfera è dato dalla sovrapposizione di \mathbf{E}_0 e del campo elettrico del dipolo di momento \mathbf{p} ; la perturbazione dovuta alla presenza della sfera è massima sulla superficie della sfera, dove il campo è radiale, ma decresce rapidamente come $1/r^3$.

Il potenziale assunto dalla sfera è quello che ci sarebbe nel centro in assenza della sfera e la densità di carica indotta (che perturba il campo \mathbf{E}_0) è data da

$$\sigma = \epsilon_0 E = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (4.40)$$

essa è positiva nell'emisfero anteriore ($0 \leq \theta < \pi/2$) con massimo $3\epsilon_0 E_0$ per $\theta = 0$, si annulla per $\theta = \pi/2$, è negativa nell'emisfero posteriore ($\pi/2 < \theta \leq \pi$) con minimo $-3\epsilon_0 E_0$ per $\theta = \pi$. Resta così giustificato quanto avevamo qualitativamente detto nel paragrafo 4.1.

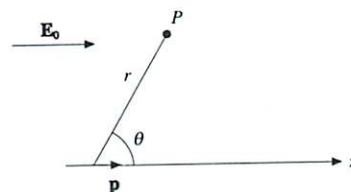


Figura 4.53

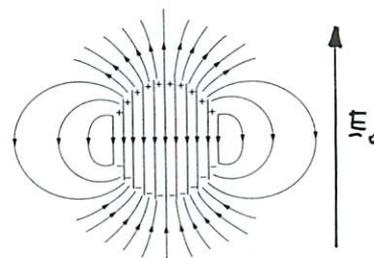


Figura 4.54

Questa distribuzione superficiale deve dare all'interno della sfera un campo elettrico ovunque opposto a \mathbf{E}_0 : abbiamo così trovato il risultato interessante *che una carica distribuita su una superficie sferica con densità che varia come $\cos\theta$ produce all'interno un campo uniforme di valore*

$$E_0 = \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \quad (4.41)$$

che va dall'emisfero dove $\cos\theta > 0$ all'emisfero dove $\cos\theta < 0$; all'esterno essa produce un campo di dipolo.

Esempio 4.24

Una sfera conduttrice di raggio R è posta a distanza $r \gg R$ da una carica puntiforme q . Calcolare la forza che agisce sulla sfera.

Soluzione

Il campo della carica q non è uniforme, però agli effetti dell'induzione sulla sfera possiamo supporlo tale se la distanza è grande. Utilizzando i risultati dell'esempio 4.23, abbiamo un dipolo di momento

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qR^3}{r^2},$$

dipendente dalla posizione. Esso, posto nel campo della carica, ha l'energia elettrostatica (2.67):

$$U_e = -pE = -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{q^2 R^3}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

Calcoliamo la forza come derivata dell'energia secondo (4.38):

$$F = -\frac{dU_e}{dr} = -\frac{q^2 R^3}{\pi\epsilon_0 r^5}.$$

Tale forza, che decresce molto rapidamente con la distanza, è sempre attrattiva: le cariche indotte di segno opposto a q sono più vicine alla carica di quelle indotte dello stesso segno.

Se il campo è veramente uniforme p non dipende dalla posizione, U_e è costante e la forza è nulla.

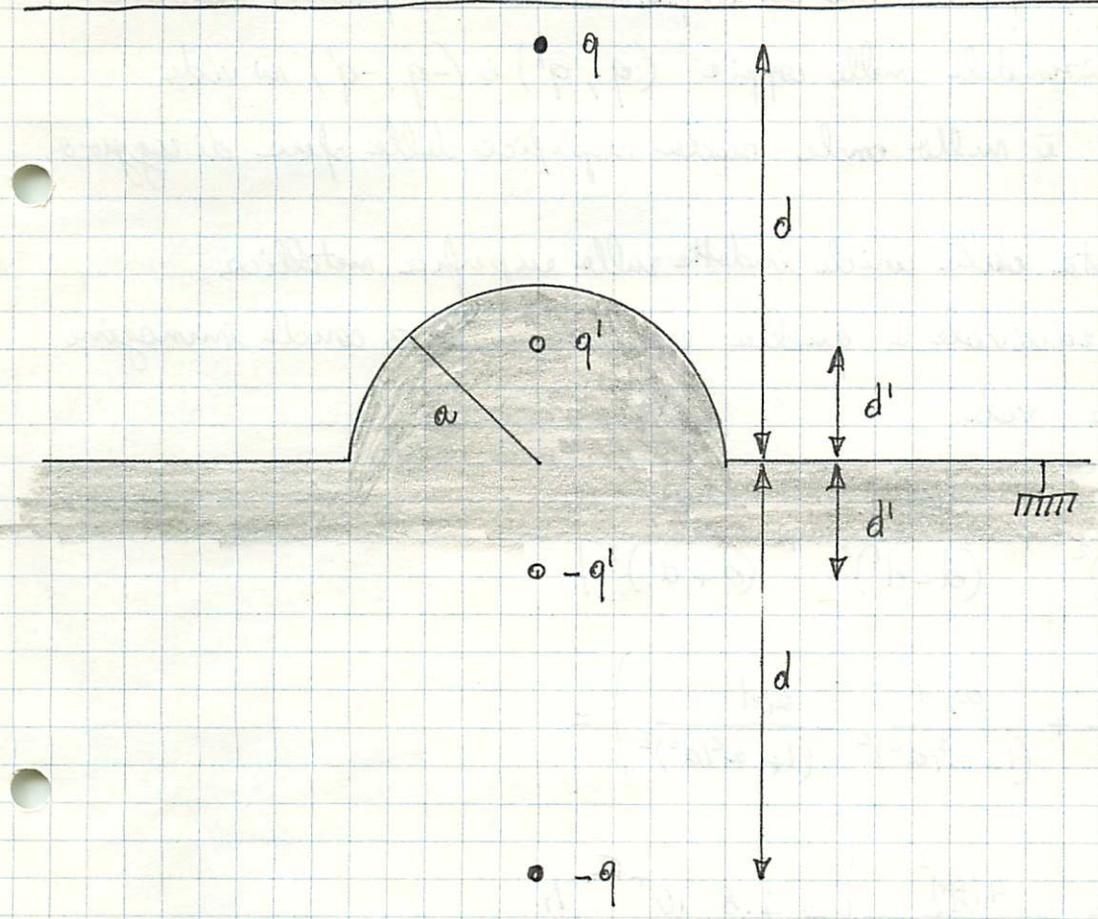
4.11 Funzioni armoniche. Problema di Dirichlet

Nel paragrafo 3.5 abbiamo visto che l'equazione di Laplace (3.28) riassume tutte le proprietà del campo elettrostatico nello spazio privo di cariche, cioè $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Noi ci siamo serviti di queste ultime, e della definizione $\mathbf{E} = 0$ all'interno, per stabilire le proprietà dei conduttori in equilibrio. Vogliamo adesso brevemente accennare a come si imposta il problema partendo dall'equazione di Laplace; essendo questo argomento tipico della fisica matematica, ci limitiamo ai concetti generali.

Le soluzioni di (3.28) che sono finite e continue insieme alle loro derivate prime e hanno derivate seconde finite si dicono *funzioni armoniche*. Si può dimostrare formalmente l'esistenza di tali soluzioni, ma ciò non è per noi molto importante perché siamo sicuri a priori, per via sperimentale, che c'è almeno una soluzione nei problemi di elettrostatica. Ben più interessante è il *teorema di unicità* della soluzione: *una funzione armonica V definita in una certa regione finita è univocamente determinata in tale regione se si assegnano i suoi valori sulla superficie chiusa Σ che delimita la regione*. Il teorema resta valido se la regione si estende all'infinito: in questo caso, dati i valori di V su una o più superficie chiu-

Una carica puntiforme $q = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ si trova a distanza $d = 5.0 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ da una superficie metallica formata da un piano infinito e da una calotta emisferica di raggio $a = 2.0 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, come mostrato in figura. La superficie metallica è a terra.

Si dice se la carica viene attratta o respinta dalla superficie, si determini il valore di tale forza e la carica di induzione sulla calotta emisferica.



La carica $q > 0$ induce sulla superficie metallica una carica totale $-q$; di conseguenza la carica q viene attratta dalla superficie.

L'entità di questa forza si può trovare con il metodo delle cariche immagine. Facendo riferimento ai problemi di una carica q a distanza d da un piano metallico messo a terra (carica immagine $-q$ a distanza d dalla parte opposta del piano) e di una carica q

a distanza d dal centro di una sfera <sup>di raggio a ,
meno a forse</sup>
(carica immagine $q' = -\frac{a}{d}q$ a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$ dal centro
della sfera) si vede subito che il sistema delle 3 cariche
immagine in figura risolve il problema in esame, cioè la
carica q reale e le 3 cariche immagine $-q \pm q'$ danno potenziale
nullo sulla superficie considerata.

Infatti, ~~pensando~~ organizzando le cariche nelle coppie
 $(q, -q)$ e $(q', -q')$ si vede che il potenziale sul piano metallico
è nullo. Organizzandole nelle coppie (q, q') e $(-q, -q')$ si vede
che il potenziale è nullo anche sulla superficie della sfera di raggio a .

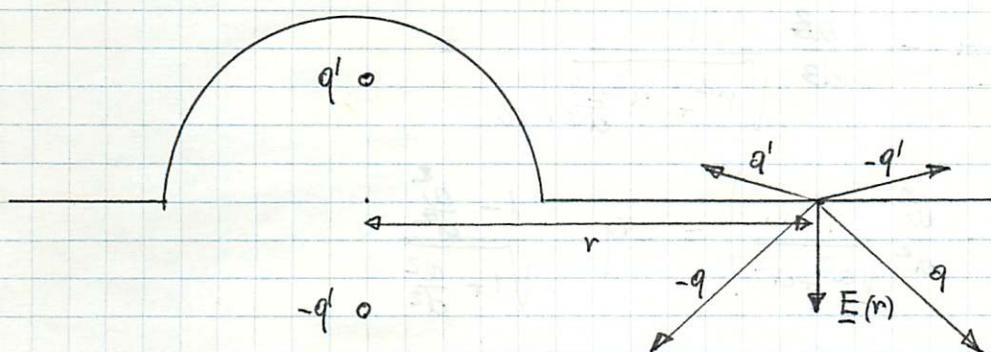
La forza esercitata dalle cariche indotte sulla superficie metallica
sulla carica q equivale a quella esercitata dalle 3 cariche immagine.
In modulo essa vale

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{(2d)^2} - \frac{qq'}{(d-d')^2} + \frac{qq'}{(d+d')^2} \right) = \\
 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{a/d}{(1-a^2/d^2)^2} - \frac{a/d}{(1+a^2/d^2)^2} \right) = \\
 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{4\left(\frac{a}{d}\right)^3}{\left(1-\left(\frac{a}{d}\right)^4\right)^2} \right) = 4.8 \cdot 10^{+6} \text{ N}
 \end{aligned}$$

La carica indotta totale è $-q$; la carica indotta sulla calotta
può essere trovata ~~in modo analogo~~ per differenza
con la carica indotta sul piano (senza calotta).

A distanza $r \geq a$ dal centro della lamina il campo elettrico sulla superficie del piano è perpendicolare al piano stesso e vale in modulo:

q •



-q •

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{d^2+r^2} \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}} - \frac{2q'}{d^2+r^2} \frac{d'}{\sqrt{d'^2+r^2}} \right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2d}{(d^2+r^2)^{3/2}} - \frac{2d \frac{d^3}{d^3}}{\left(r^2+d^2 \frac{d^4}{d^4}\right)^{3/2}} \right)$$

Per il teorema di Coulomb la densità indotta a distanza r è

$$\sigma(r) = -\epsilon_0 E(r) = -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{2d}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{2d \frac{d^3}{d^3}}{\left(r^2+d^2 \frac{d^4}{d^4}\right)^{3/2}} \right)$$

La carica indotta sul piano vale

$$q_p = \int_0^{\infty} \sigma(r) 2\pi r dr =$$

$$= -qd \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{\frac{q^2}{d^3}}{\left(r^2 + d^2 \frac{q^2}{d^4}\right)^{3/2}} \right) r dr =$$

$$= -qd \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} - \frac{\frac{q^2}{d^3}}{\sqrt{r^2 + d^2 \frac{q^2}{d^4}}} \right) \Big|_0^{\infty} =$$

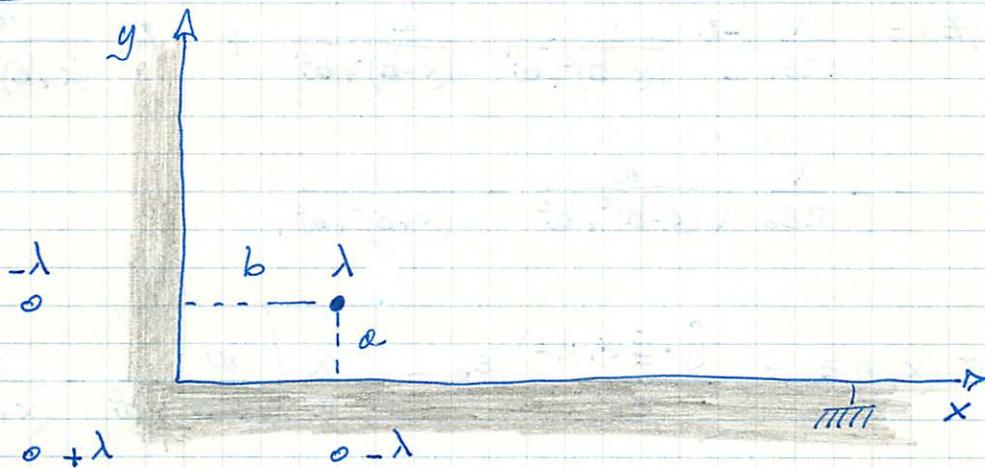
$$= -qd \left(\frac{1}{\sqrt{0^2 + d^2}} - \frac{\frac{q^2}{d^3}}{\sqrt{0^2 + d^2 \frac{q^2}{d^4}}} \right) = -q \frac{1 - \frac{q^2}{d^2}}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{d^2}}}$$

la carica indotta sulla calotta \bar{e} :

$$q_c = -q - q_p = -q \left(1 - \frac{1 - \frac{q^2}{d^2}}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{d^2}}} \right) = -7.1 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

Note che $\lim_{d \rightarrow \infty} q_c = 0$ $\lim_{q \rightarrow \infty} q_c = -q$

Un filo indefinito con densità di carica lineare $\lambda = 10^{-6} \text{ C m}^{-1}$
 si trova ad una distanza $a = 30 \text{ mm}$ e $b = 90 \text{ mm}$
 rispettivamente da due piani metallici indefiniti messi a terra
 formati tra loro un angolo retto. Si determinino
 le componenti x ed y della forza per unità di lunghezza
 esercitata dal filo e il suo valore in modulo,
 la densità di carica indotta sulle superfici metalliche e il
 suo valore nei punti $(0, 0, z)$



Il problema è equivalente a quello del filo λ e dei 3 fili
 immagine $-\lambda, -\lambda, +\lambda$ piazzati come in figura: infatti
 i 4 fili così disposti creano un potenziale nullo sulle
 superfici $x=0$ e $y=0$.

La forza ^{per unità di lunghezza} sul filo ha componenti

$$F_x = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2b} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{b} + \frac{b}{a^2+b^2} \right) =$$

$$= -\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{(a^2+b^2)b}$$

$$F_y = -\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2}{(a^2+b^2)a}$$

e modulo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{a^6 + b^6}}{ab(a^2 + b^2)} = 0.27 \text{ N m}^{-1}$$

In un punto di coordinate $(x, 0, z)$ si ha:

$$E_x(x, 0, z) = E_z(x, 0, z) = 0$$

$$\begin{aligned} E_y(x, 0, z) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[-z \frac{1}{\sqrt{(x-b)^2 + a^2}} \frac{a}{\sqrt{(x-b)^2 + a^2}} + z \frac{a}{(x+b)^2 + a^2} \right] \\ &= -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{(x-b)^2 + a^2} - \frac{a}{(x+b)^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{da cui } \sigma(x, 0, z) = \hat{y} \cdot \underline{E}(x, 0, z) \epsilon_0 = -\frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{a}{(x-b)^2 + a^2} - \frac{a}{(x+b)^2 + a^2} \right)$$

In un punto di coordinate $(0, y, z)$ si ha:

$$E_y(0, y, z) = E_z(0, y, z) = 0$$

$$E_x(0, y, z) = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{b}{(x-a)^2 + b^2} - \frac{b}{(x+b)^2 + b^2} \right)$$

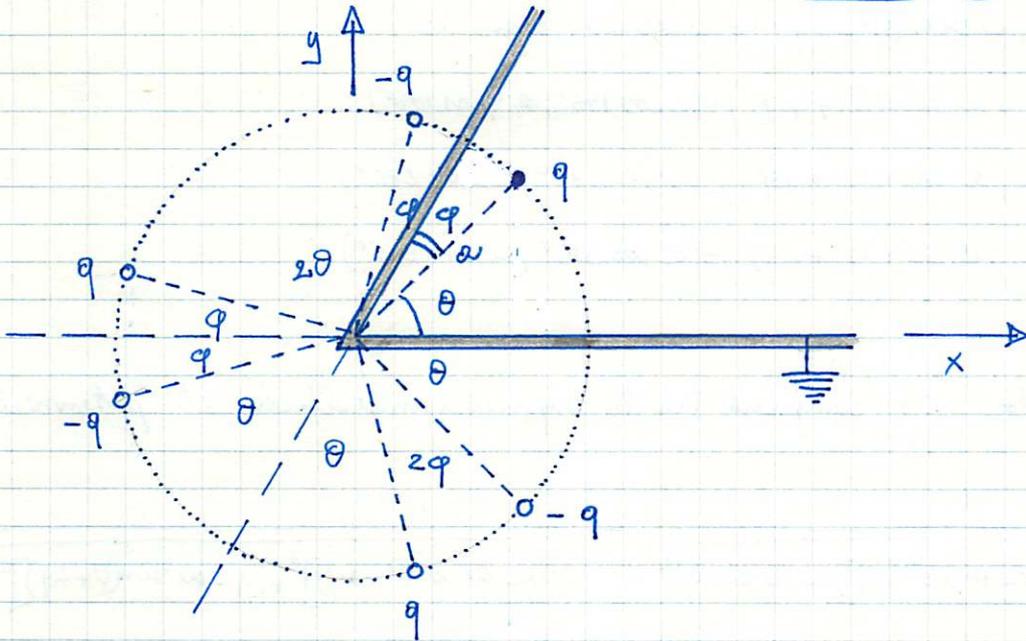
$$\text{da cui } \sigma(0, y, z) = -\frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{b}{(x-a)^2 + b^2} - \frac{b}{(x+b)^2 + b^2} \right)$$

$$\sigma(0, 0, z) = 0$$

$$\text{check: } \int_0^\infty dx \sigma(x, 0, z) dz + \int_0^\infty dy \sigma(0, y, z) dz =$$

$$= -\frac{\lambda}{\pi} dz \left[z \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + z \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \right] = -\lambda dz$$

Una carica puntiforme $q = 3.6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ è posta in prossimità di due superfici metalliche piane connesse a terra e formanti un diedro di 60° . La carica è distante $a = 5.0 \text{ cm}$ dalla congiungente le due superfici con le quali forma due angoli $\theta = 45^\circ$ e $\varphi = 15^\circ$. Si calcoli la densità di carica indotta sulle congiungente le due superfici metalliche e il potenziale $V(x, y)$ in un generico punto x, y all'interno o all'esterno del diedro metallico alla stessa quota di q .



The system of the charge q and the metallic ^{grounded} surfaces is equivalent to the system of the ^{charge} q and the five image charges shown in the figure.

Infatti è facile vedere che le sei cariche possono essere organizzate in coppie di q e $-q$ simmetriche rispetto ai piani metallici. Ne segue che il potenziale generato dalle sei cariche è nullo sulla superficie metallica formante l'angolo $\theta + \varphi = 60^\circ$.

Il campo elettrico deve essere ortogonale a ciascuna superficie metallica e quindi non può che essere nullo sulla congiungente le due superfici. Ne segue che la densità di carica indotta lungo tale congiungente è anch'essa nulla.

Il potenziale elettrico generato da una carica q è:

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Rispetto al sistema di riferimento x, y in figura le coordinate delle 6 cariche sono:

- $q : (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta) = (a \cos 45^\circ, a \sin 45^\circ)$
- $-q : (a \cos(\vartheta + 2\varphi), a \sin(\vartheta + 2\varphi)) = (a \cos 75^\circ, a \sin 75^\circ)$
- $q : (a \cos(3\vartheta + 2\varphi), a \sin(3\vartheta + 2\varphi)) = (a \cos 165^\circ, a \sin 165^\circ)$
- $-q : (a \cos(3\vartheta + 4\varphi), a \sin(3\vartheta + 4\varphi)) = (a \cos 195^\circ, a \sin 195^\circ)$
- $q : (a \cos(5\vartheta + 4\varphi), a \sin(5\vartheta + 4\varphi)) = (a \cos 285^\circ, a \sin 285^\circ)$
- $-q : (a \cos(5\vartheta + 6\varphi), a \sin(5\vartheta + 6\varphi)) = (a \cos 315^\circ, a \sin 315^\circ)$

In un generico punto x, y compreso tra le superfici metalliche il potenziale è

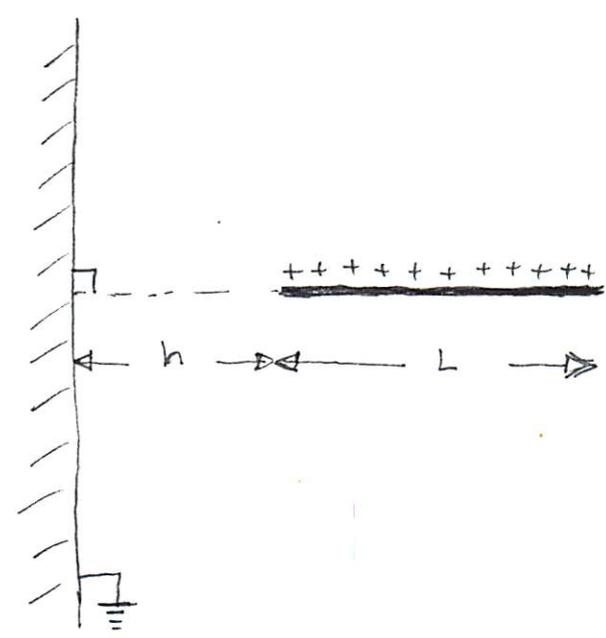
$$V(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{[x - a \cos \vartheta]^2 + [y - a \sin \vartheta]^2}} - \frac{1}{\sqrt{[x - a \cos(\vartheta + 2\varphi)]^2 + [y - a \sin(\vartheta + 2\varphi)]^2}} \right. \\ + \frac{1}{\sqrt{[x - a \cos(3\vartheta + 2\varphi)]^2 + [y - a \sin(3\vartheta + 2\varphi)]^2}} - \frac{1}{\sqrt{[x - a \cos(3\vartheta + 4\varphi)]^2 + [y - a \sin(3\vartheta + 4\varphi)]^2}} \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{[x - a \cos(5\vartheta + 4\varphi)]^2 + [y - a \sin(5\vartheta + 4\varphi)]^2}} - \frac{1}{\sqrt{[x - a \cos(5\vartheta + 6\varphi)]^2 + [y - a \sin(5\vartheta + 6\varphi)]^2}} \right]$$

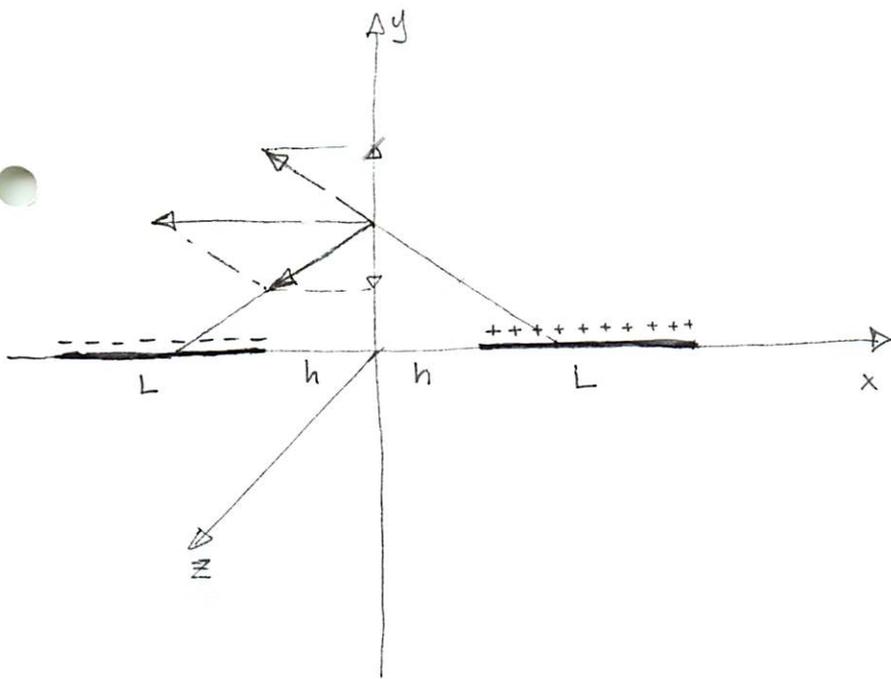
Se x, y giace all'esterno del diedro metallico, si ha

$$V(x, y) = 0$$

Un ago ^{di plastica} di lunghezza $L = 50\text{cm}$ conico uniformemente con densità di carica per unità di lunghezza $\lambda = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, è posto ad una distanza $h = 1\text{cm}$ da un piano conduttore tenuto a potenziale nullo (vedi figura). Calcolare

- a) la densità di carica superficiale σ indotta sul piano metallico
- b) la carica totale Q indotta sullo stesso piano
- c) la forza F resistente tra l'ago ed il piano.





$$V(0, y, z) = 0$$

λ

la condizione $V(0, y, z) = 0$ è equivalentemente ottenuta considerando oltre alla densità di carica λ , la densità di carica immagine $-\lambda$ piazzata simmetricamente rispetto al piano $x=0$

Infatti si ha:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^L \frac{\lambda dl}{\left[[x - (h+l)]^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \int_0^L \frac{-\lambda dl}{\left[[x - (-h-l)]^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

che si annulla per $x=0$

Sul piano $x=0$ il campo elettrico ha componenti $E_y(0, y, z) = E_z(0, y, z) = 0$. La componente ortogonale al piano è:

$$E_x(0, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ - \int_0^L \frac{dl (h+l)}{\left[(h+l)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \int_0^L \frac{dl (h+l)}{\left[(h+l)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

posto $r^2 = y^2 + z^2$

$$E_x(0, y, z) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_h^{L+h} \frac{dt \ t}{(r^2 + t^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(r^2 + t^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_h^{L+h} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (L+h)^2}} \right]$$

Per il teorema di Coulomb la densità di carica indotta sul piano conduttore $x=0$ vale

$$\sigma(r) = \epsilon_0 E_x(0, r) = - \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (L+h)^2}} \right]$$

la carica totale indotta è:

$$Q = \int_0^{\infty} \sigma(r) \ 2\pi r \ dr = - \lambda \int_0^{\infty} r \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (L+h)^2}} \right) dr$$

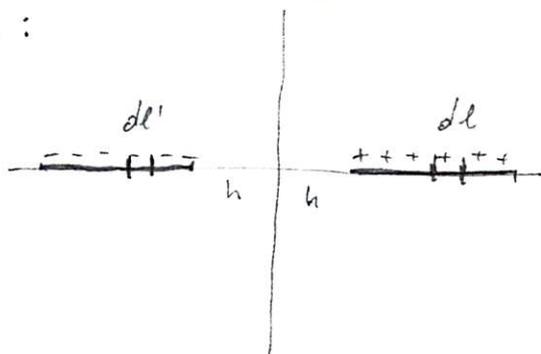
$$= - \lambda \left[\sqrt{r^2 + h^2} - \sqrt{r^2 + (L+h)^2} \right]_0^{\infty} = - \lambda \left[-h + (L+h) \right] = - \lambda L = -8.10^{-6} \text{ C}$$

che è la carica, completa di segno, posseduta dall'ago.

(3)

Le forze tra il piano conduttore e la densità λ è uguale a quella tra densità λ e la densità immaginaria $-\lambda$:

$$F = \int_0^L dl \int_0^L dl' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\lambda^2}{(2h+l+l')^2} =$$



$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L dl \left. (2h+l+l')^{-1} \right|_{l'=0}^{l'=L} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L dl \left(\frac{1}{2h+L+l} - \frac{1}{2h+l} \right) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h+L+l}{2h+l} \Big|_{l=0}^{l=L} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(2h+2L)2h}{(2h+L)^2}$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1+L/h}{(1+L/2h)^2} < 0 \quad \underline{\text{attrattiva!}}$$

$$= -1.64 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

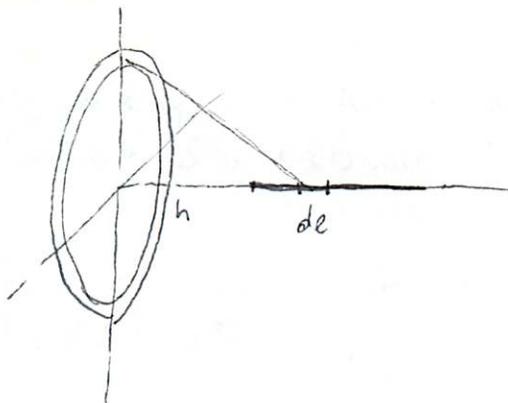
quando $L/h \ll 1$

$$F = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(1+L/h) - 2 \ln(1+L/2h) \right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left[L/h - \frac{1}{2} \frac{L^2}{h^2} + \dots - 2 \left(\frac{L}{2h} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{4h^2} + \dots \right) \right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{L^2}{4h^2} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$

Alternativamente si può calcolare
 la forza tra la densità λ e la
 densità indotta σ :



$$F = \int_0^{\infty} \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr \cdot \lambda dl}{r^2 + (h+l)^2} \cdot \frac{h+l}{\sqrt{r^2 + (h+l)^2}}$$

$$= \int_0^{\infty} dr \frac{\lambda \sigma r}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{h^2}^{(L+h)^2} \frac{dx}{(r^2 + x)^{3/2}} =$$

$$x = (h+l)^2$$

$$= \int_0^{\infty} dr \frac{\lambda \sigma r}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + x}} \right]_{h^2}^{(L+h)^2} =$$

$$= \int_0^{\infty} dr \frac{\sigma(r) \cdot r}{2\epsilon_0} \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (L+h)^2}} \right) =$$

$$= - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\sigma(r)^2}{\epsilon_0} \cdot 2\pi r dr = \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} = \text{pressione elettrostatica} \right)$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h(2L+2h)}{(L+2h)^2}$$

Due fili infinitamente lunghi complanari e paralleli hanno una carica $+\lambda$ e $-\lambda$ per unità di lunghezza. Si dimostri che la superficie equipotenziale $V = V_0$ è un cilindro di raggio r_0 il cui asse dista a_+ e a_- rispettivamente dal filo carico positivamente e negativamente.

Si calcoli r_0 e a_{\pm} in funzione di λ , V_0 e della distanza b

tra i fili $\sqrt{a_+^2 + a_-^2} = r_0^2 = a_+ a_-$ si verificano due Si considerino poi due cilindri metallici infinitamente lunghi con assi complanari e paralleli. con carica $\pm\lambda$ per unità di lunghezza. Si sono $r_+ = 1.0$ mm.

e $r_- = 2.0$ mm i loro raggi e $d = 8.0$ mm. la distanza tra i loro assi. Si calcoli la capacità per unità di lunghezza C della coppia di cilindri

Il potenziale generato da un filo infinitamente esteso con densità di carica λ vale $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{costante}$

dove r è la distanza dal filo

Supponendo che i fili sono paralleli all'asse z e intersechino il piano $z=0$ nei punti $(0,0)$ quello carico positivamente e $(b,0)$ quello carico negativamente, si ha:

$$V(x,y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-b)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x-b)^2 + y^2}{x^2 + y^2}}$$

L'equazione della superficie equipotenziale $V(x,y) = V_0$ dà:

$$\frac{(x-b)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \gamma^2 \quad \text{con } \gamma \equiv \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$$

$$(\gamma^2 - 1)x^2 + 2bx + (\gamma^2 - 1)y^2 = b^2$$

$$x^2 + 2\frac{b}{\gamma^2 - 1}x + \left(\frac{b}{\gamma^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{\gamma^2 - 1} + \left(\frac{b}{\gamma^2 - 1}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{\gamma^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2 \gamma^2}{(\gamma^2 - 1)^2}$$

che è l'equazione di un cilindro di raggio

$$r_0 = \frac{b\gamma}{|\gamma^2 - 1|} = \frac{b}{|\gamma - \gamma^{-1}|} = \frac{b}{2 \sinh\left(\frac{2\pi\epsilon_0 |V_0|}{\lambda}\right)}$$

e il cui asse interseca il piano $z=0$ nel punto $\left(\frac{b}{1-\gamma^2}, 0\right)$

$$a_+ = \left| \frac{b}{1-\gamma^2} - 0 \right| = \frac{b}{|\gamma^2 - 1|}$$

$$a_- = \left| \frac{b}{1-\gamma^2} - b \right| = \frac{b}{|\gamma^{-2} - 1|}$$

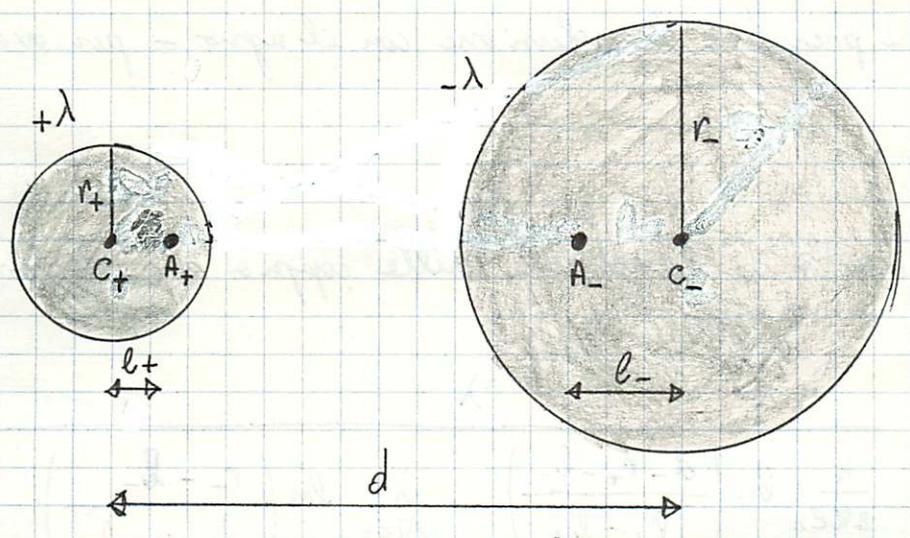
Si noti che

$$a_+ a_- = \frac{b}{|\gamma^2 - 1|} \cdot \frac{b\gamma^2}{|\gamma^2 - 1|} = \frac{b^2 \gamma^2}{(\gamma^2 - 1)^2} = r_0^2 \quad \text{e inoltre}$$

$$\text{se } V_0 > 0 \quad \frac{b}{1-\gamma^2} < 0 \quad \text{se } V_0 < 0 \quad \frac{b}{1-\gamma^2} > b$$

Si considerino ora i due cilindri metallici.

Il potenziale sulla superficie dei cilindri e al loro esterno può essere ottenuto con il metodo delle immagini:



i cilindri vengono sostituiti da due fili infinitamente lunghi con carica $+\lambda$ e $-\lambda$ per unità di lunghezza posanti per i punti A_+ e A_- a distanze l_+ ed l_- dai centri dei cilindri.

l_+ ed l_- vengono determinati dalla condizione che la superficie dei due cilindri sia a potenziale costante:

$$\begin{cases} r_+^2 = l_+ (d - l_-) \\ r_-^2 = l_- (d - l_+) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro $l_+ - l_- = \frac{r_+^2 - r_-^2}{d}$ che da

$$r_{\pm}^2 = l_{\pm} \left(d - l_{\pm} \pm \frac{r_+^2 - r_-^2}{d} \right)$$

$$d b_{\pm}^2 - [d^2 \pm (r_+^2 - r_-^2)] b_{\pm} + d r_{\pm}^2 = 0$$

$$b_{\pm} = \frac{d^2 \pm (r_+^2 - r_-^2) \pm \sqrt{[d^2 \pm (r_+^2 - r_-^2)]^2 - 4d^2 r_{\pm}^2}}{2d}$$

(si noti che occorre prendere la soluzione con il segno - per avere $b_{\pm} < r_{\pm}$)

la capacità per unità di lunghezza della coppia di cilindri è:

$$C = \frac{\lambda}{V_{0+} - V_{0-}} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d - r_+ - b_-}{r_+ - b_+}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_- - b_-}{d - r_- - b_+}\right)}$$

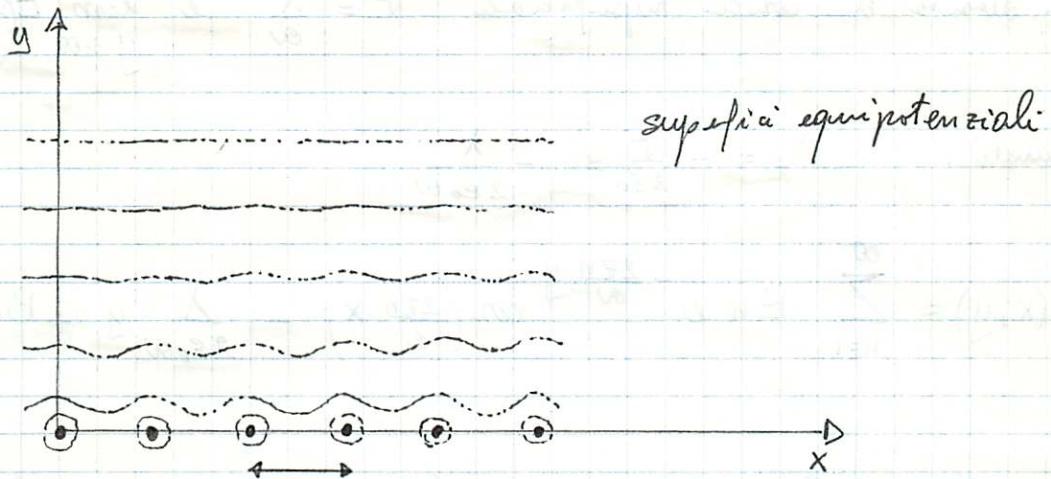
$$= \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_+^2/b_+ - r_+}{r_+ - b_+}\right) - \ln\left(\frac{r_- - b_-}{r_-^2/b_- - r_-}\right)}$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_+}{b_+}\right) - \ln\left(\frac{b_-}{r_-}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_+ r_-}{b_+ b_-}\right)} = 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ F m}^{-1}$$

$$b_+ = 0.50848 \text{ mm}$$

$$b_- = 0.13348 \text{ mm}$$

Si consideri una serie di infiniti fili infinitamente lunghi paralleli e complanari distanti a l'uno dall'altro (griglia ideale) e carichi con densità lineare λ . Trovare il potenziale elettrico generato da questo sistema.



Si ponga l'asse z parallelo ai fili e attraversano il piano $z=0$ nei punti di coordinate $(x, y) = (na, 0)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Per motivi di simmetria il potenziale non dipende da z

lo si assume della forma $V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + A_0(y)$

$V(x, y)$ deve soddisfare l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$ al di fuori dei fili; imponendo le condizioni al contorno della sviluppo di V la faccia; si ha:

$$\nabla^2 A_0(y) = 0 \quad \frac{d^2}{dy^2} A_0(y) = 0 \quad A_0(y) = B_0 y + C_0$$

$$\nabla^2 A_n(y) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) = \frac{d^2}{dy^2} A_n(y) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) - \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} A_n(y) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) = 0$$

$$\frac{d^2}{dy^2} A_n(y) - \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 A_n(y) = 0 \quad A_n(y) = B_n e^{-\frac{2\pi n}{a} y} + C_n e^{\frac{2\pi n}{a} y}$$

La costante B_0 può essere scelta nulla: $B_0 = 0$

affine V sia finito deve essere $C_n = 0$

$$\text{Per } y \gg a \quad V(x, y) = C_0 y$$

La griglia è equivalente ad un piano metallico con densità di carica superficiale $\sigma = \frac{\lambda}{a}$

$$\text{Per } y \gg a \quad V(x, y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} y$$

$$\text{quindi } C_0 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{\lambda}{2\epsilon_0 a}$$

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{2\pi n}{a} y} \cos\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) + B_0 y$$

I coefficienti B_n possono essere determinati imponendo che il campo elettrico associato $\underline{E}(x, y) = -\underline{\nabla} V$ sia quello della griglia infinita con densità λ .

ad esempio per $y \gg a$ la griglia è equivalente ad un piano metallico con densità di carica superficiale $\sigma = \frac{\lambda}{a}$ quindi:

$$\text{quindi } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{E_y(x, y)}{y} = -B_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 a}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} E_x(x, y) = 0$$

$$B_0 = -\frac{\lambda}{2\epsilon_0 a}$$

$$\text{per } y=0 \quad E_x(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{2\pi n}{a} \sin\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) \quad \text{che invertendo dà:}$$

$$B_n \frac{2\pi n}{a} = \frac{a}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_x(x, 0) \sin\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) dx$$

$$\text{ma } E_x(x, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{x+pe} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{e-x+pe} \right) \quad \text{da cui}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi n} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\sin(2\pi n x/a)}{x+pe} dx - \sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\sin(2\pi n x/a)}{e-x+pe} dx \right\}$$

The Electric Field in Various Circumstances (Continued)

7-1 Methods for finding the electrostatic field

This chapter is a continuation of our consideration of the characteristics of electric fields in various particular situations. We shall first describe some of the more elaborate methods for solving problems with conductors. It is not expected that these more advanced methods can be mastered at this time. Yet it may be of interest to have some idea about the kinds of problems that can be solved, using techniques that may be learned in more advanced courses. Then we take up two examples in which the charge distribution is neither fixed nor is carried by a conductor, but instead is determined by some other law of physics.

As we found in Chapter 6, the problem of the electrostatic field is fundamentally simple when the distribution of charges is specified; it requires only the evaluation of an integral. When there are conductors present, however, complications arise because the charge distribution on the conductors is not initially known; the charge must distribute itself on the surface of the conductor in such a way that the conductor is an equipotential. The solution of such problems is neither direct nor simple.

We have looked at an indirect method of solving such problems, in which we find the equipotentials for some specified charge distribution and replace one of them by a conducting surface. In this way we can build up a catalog of special solutions for conductors in the shapes of spheres, planes, etc. The use of images, described in Chapter 6, is an example of an indirect method. We shall describe another in this chapter.

If the problem to be solved does not belong to the class of problems for which we can construct solutions by the indirect method, we are forced to solve the problem by a more direct method. The mathematical problem of the direct method is the solution of Laplace's equation,

$$\nabla^2\phi = 0, \quad (7.1)$$

subject to the condition that ϕ is a suitable constant on certain boundaries—the surfaces of the conductors. Problems which involve the solution of a differential field equation subject to certain *boundary conditions* are called *boundary-value problems*. They have been the object of considerable mathematical study. In the case of conductors having complicated shapes, there are no general analytical methods. Even such a simple problem as that of a charged cylindrical metal can closed at both ends—a beer can—presents formidable mathematical difficulties. It can be solved only approximately, using numerical methods. The only general methods of solution are numerical.

There are a few problems for which Eq. (7.1) can be solved directly. For example, the problem of a charged conductor having the shape of an ellipsoid of revolution can be solved exactly in terms of known special functions. The solution for a thin disc can be obtained by letting the ellipsoid become infinitely oblate. In a similar manner, the solution for a needle can be obtained by letting the ellipsoid become infinitely prolate. However, it must be stressed that the only direct methods of general applicability are the numerical techniques.

Boundary-value problems can also be solved by measurements of a physical analog. Laplace's equation arises in many different physical situations: in steady-state heat flow, in irrotational fluid flow, in current flow in an extended medium,

7-1 Methods for finding the electrostatic field

7-2 Two-dimensional fields; functions of the complex variable

7-3 Plasma oscillations

7-4 Colloidal particles in an electrolyte

7-5 The electrostatic field of a grid

and in the deflection of an elastic membrane. It is frequently possible to set up a physical model which is analogous to an electrical problem which we wish to solve. By the measurement of a suitable analogous quantity on the model, the solution to the problem of interest can be determined. An example of the analog technique is the use of the electrolytic tank for the solution of two-dimensional problems in electrostatics. This works because the differential equation for the potential in a uniform conducting medium is the same as it is for a vacuum.

There are many physical situations in which the variations of the physical fields in one direction are zero, or can be neglected in comparison with the variations in the other two directions. Such problems are called two-dimensional; the field depends on two coordinates only. For example, if we place a long charged wire along the z -axis, then for points not too far from the wire the electric field depends on x and y , but not on z ; the problem is two-dimensional. Since in a two-dimensional problem $\partial/\partial z = 0$, the equation for ϕ in free space is

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

Because the two-dimensional equation is comparatively simple, there is a wide range of conditions under which it can be solved analytically. There is, in fact, a very powerful indirect mathematical technique which depends on a theorem from the mathematics of functions of a complex variable, and which we will now describe.

7-2 Two-dimensional fields; functions of the complex variable

The complex variable \bar{z} is defined as

$$\bar{z} = x + iy.$$

(Do not confuse \bar{z} with the z -coordinate, which we ignore in the following discussion because we assume there is no z -dependence of the fields.) Every point in x and y then corresponds to a complex number \bar{z} . We can use \bar{z} as a single (complex) variable, and with it write the usual kinds of mathematical functions $F(\bar{z})$. For example,

$$F(\bar{z}) = \bar{z}^2,$$

or

$$F(\bar{z}) = 1/\bar{z}^3,$$

or

$$F(\bar{z}) = \bar{z} \log \bar{z},$$

and so forth.

Given any particular $F(\bar{z})$ we can substitute $\bar{z} = x + iy$, and we have a function of x and y —with real and imaginary parts. For example,

$$\bar{z}^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (7.3)$$

Any function $F(\bar{z})$ can be written as a sum of a pure real part and a pure imaginary part, each part a function of x and y :

$$F(\bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y), \quad (7.4)$$

where $U(x, y)$ and $V(x, y)$ are real functions. Thus from any complex function $F(\bar{z})$ two new functions $U(x, y)$ and $V(x, y)$ can be derived. For example, $F(\bar{z}) = \bar{z}^2$ gives us the two functions

$$U(x, y) = x^2 - y^2, \quad (7.5)$$

and

$$V(x, y) = 2xy. \quad (7.6)$$

Now we come to a miraculous mathematical theorem which is so delightful that we shall leave a proof of it for one of your courses in mathematics. (We should not reveal all the mysteries of mathematics, or that subject matter would

$$\text{se } F(z) = F(x+iy) = U(x, y) + iV(x, y)$$

$$U, V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

se $F'(z)$ esiste

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

allora

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x+iy) - F(x+iy)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} + i \frac{V(x+\Delta x, y) - V(x, y)}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x+i(y+\Delta y)) - F(x+iy)}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{U(x, y+\Delta y) - U(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{V(x, y+\Delta y) - V(x, y)}{i\Delta y} = \end{aligned}$$

$$= -i \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

condizioni di Cauchy - Riemann

e cause di queste condizioni le superfici $U = \text{costante}$ e $V = \text{costante}$ sono mutuamente ortogonali

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

become too dull.) It is this. For any "ordinary function" (mathematicians will define it better) the functions U and V automatically satisfy the relations

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.8)$$

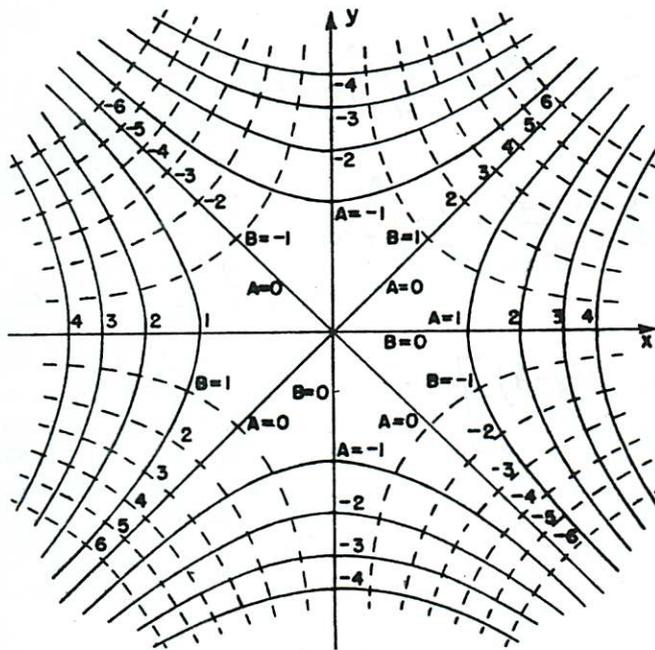
It follows immediately that each of the functions U and V satisfy Laplace's equation:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.10)$$

These equations are clearly true for the functions of (7.5) and (7.6).

Thus, starting with any ordinary function, we can arrive at two functions $U(x, y)$ and $V(x, y)$, which are both solutions of Laplace's equation in two dimensions. Each function represents a possible electrostatic potential. We can pick any function $F(z)$ and it should represent some electric field problem—in fact, two problems, because U and V each represent solutions. We can write down as many solutions as we wish—by just making up functions—then we just have to find the problem that goes with each solution. It may sound backwards, but it's a possible approach.



— $x^2 - y^2 = \text{constant}$
 - - - $xy = \text{constant}$

Fig. 7-1. Two sets of orthogonal curves which can represent equipotentials in a two-dimensional electrostatic field.

As an example, let's see what physics the function $F(z) = z^2$ gives us. From it we get the two potential functions of (7.5) and (7.6). To see what problem the function U belongs to, we solve for the equipotential surfaces by setting $U = A$, a constant:

$$x^2 - y^2 = A.$$

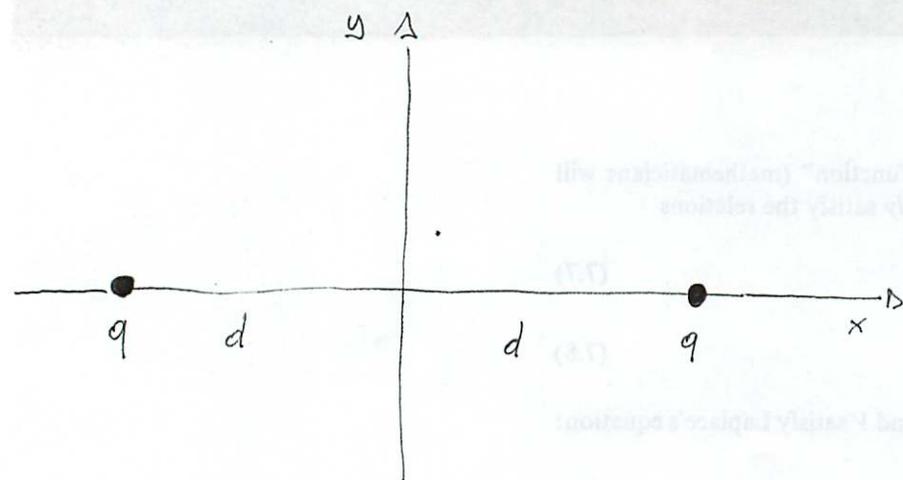
This is the equation of a rectangular hyperbola. For various values of A , we get the hyperbolas shown in Fig. 7-1. When $A = 0$, we get the special case of diagonal straight lines through the origin.

Such a set of equipotentials corresponds to several possible physical situations. First, it represents the fine details of the field near the point halfway between two

$$F(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$U = x^2 - y^2$$

$$V = 2xy$$



$$\begin{aligned}
 V(x,y) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(d+x)^2 + y^2}} \right) = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{d^2} - \frac{2x}{d} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{d^2} + \frac{2x}{d} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{d^2} + \frac{2x}{d} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{x^2 + y^2}{d^2} - \frac{2x}{d} \right)^2 + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{d^2} + \frac{2x}{d} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{x^2 + y^2}{d^2} + \frac{2x}{d} \right)^2 + \dots \right] = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{d^2} - \frac{3}{4} \frac{4x^2}{d^2} + O(d^{-4}) \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{d^2} + O(d^{-4}) \right)
 \end{aligned}$$

Se si raggruppano due cariche $-q$ nei punti $(0, \pm d)$ il potenziale diventa

$$\begin{aligned}
 V(x,y) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{d^2} + O(d^{-4}) - 2 + \frac{x^2 + y^2}{d^2} + O(d^{-4}) \right] = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[\frac{3}{4d^2} (x^2 + y^2) + O(d^{-5}) \right]
 \end{aligned}$$

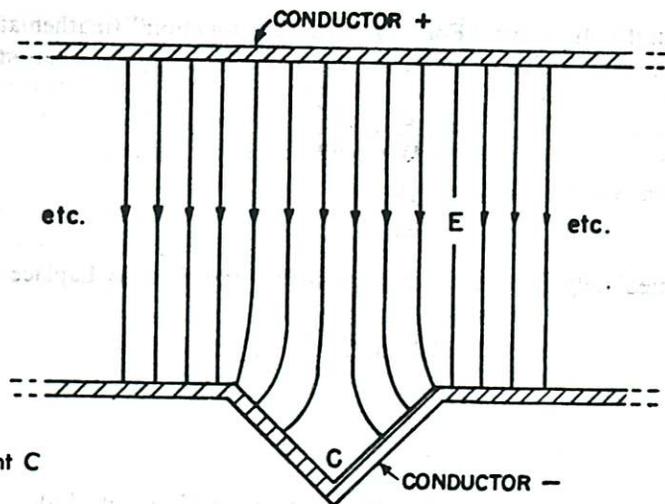


Fig. 7-2. The field near the point C is the same as that in Fig. 7-1.

equal point charges. Second, it represents the field at an inside right-angle corner of a conductor. If we have two electrodes shaped like those in Fig. 7-2, which are held at different potentials, the field near the corner marked C will look just like the field above the origin in Fig. 7-1. The solid lines are the equipotentials, and the broken lines at right angles correspond to lines of E . Whereas at points of protuberances the electric field tends to be high, it tends to be *low* in dents or hollows.

The solution we have found also corresponds to that for a hyperbola-shaped electrode near a right-angle corner, or for two hyperbolas at suitable potentials. You will notice that the field of Fig. 7-1 has an interesting property. The x -component of the electric field, E_x , is given by

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -2x.$$

The electric field is proportional to the distance from the axis. This fact is used to make devices (called quadrupole lenses) that are useful for focusing particle beams (see Section 29-9). The desired field is usually obtained by using four hyperbola-shaped electrodes, as shown in Fig. 7-3. For the electric field lines in Fig. 7-3, we have simply copied from Fig. 7-1 the set of broken-line curves that represent $V = \text{constant}$. We have a bonus! The curves for $V = \text{constant}$ are orthogonal to the ones for $U = \text{constant}$ because of the equations (7.7) and (7.8). Whenever we choose a function $F(\bar{\delta})$, we get from U and V both the equipotentials and field lines. And you will remember that we have solved either of two problems, depending on which set of curves we call the equipotentials.

As a second example, consider the function

$$F(\bar{\delta}) = \sqrt{\bar{\delta}}. \quad (7.11)$$

If we write

$$\bar{\delta} = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

where

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

and

$$\tan \theta = y/x,$$

then

$$F(\bar{\delta}) = \rho^{1/2} e^{i\theta/2}$$

$$= \rho^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

from which

$$F(\bar{\delta}) = \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2} \right]^{1/2} + i \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.12)$$

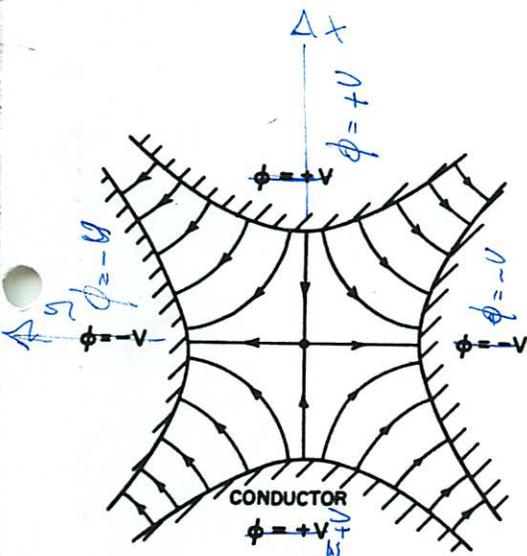


Fig. 7-3. The field in a quadrupole lens.

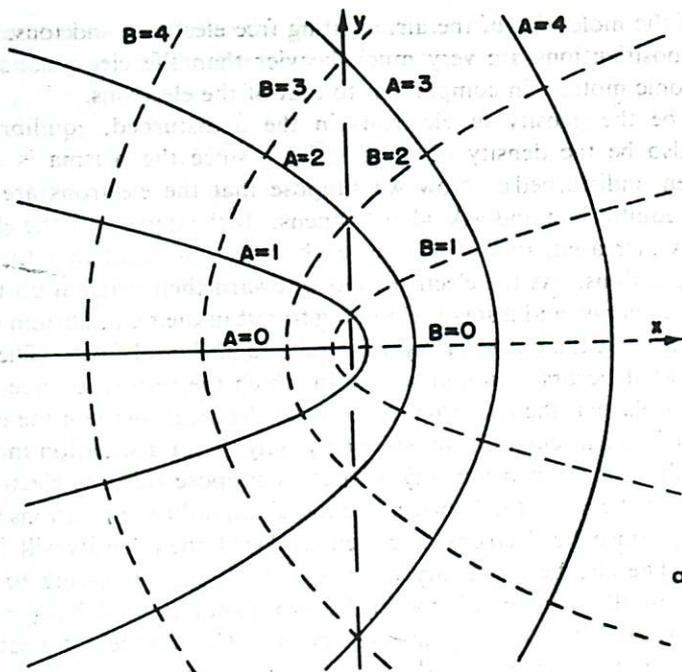


Fig. 7-4. Curves of constant $U(x, y)$ and $V(x, y)$ from Eq. (7.12).

The curves for $U(x, y) = A$ and $V(x, y) = B$, using U and V from Eq. (7.12), are plotted in Fig. 7-4. Again, there are many possible situations that could be described by these fields. One of the most interesting is the field near the edge of a thin plate. If the line $B = 0$ —to the right of the y -axis—represents a thin charged plate, the field lines near it are given by the curves for various values of A . The physical situation is shown in Fig. 7-5.

Further examples are

$$F(\bar{z}) = z^{3/2}, \quad (7.13)$$

which yields the field *outside* a rectangular corner

$$F(\bar{z}) = \log \bar{z}, \quad (7.14)$$

which yields the field for a line charge, and

$$F(\bar{z}) = 1/\bar{z}, \quad (7.15)$$

which gives the field for the two-dimensional analog of an electric dipole, i.e., two parallel line charges with opposite polarities, very close together.

We will not pursue this subject further in this course, but should emphasize that although the complex variable technique is often powerful, it is limited to two-dimensional problems; and also, it is an indirect method.

7-3 Plasma oscillations

We consider now some physical situations in which the field is determined neither by fixed charges nor by charges on conducting surfaces, but by a combination of two physical phenomena. In other words, the field will be governed simultaneously by two sets of equations: (1) the equations from electrostatics relating electric fields to charge distribution, and (2) an equation from another part of physics that determines the positions or motions of the charges in the presence of the field.

The first example that we will discuss is a dynamic one in which the motion of the charges is governed by Newton's laws. A simple example of such a situation occurs in a plasma, which is an ionized gas consisting of ions and free electrons distributed over a region in space. The ionosphere—an upper layer of the atmosphere—is an example of such a plasma. The ultraviolet rays from the sun knock

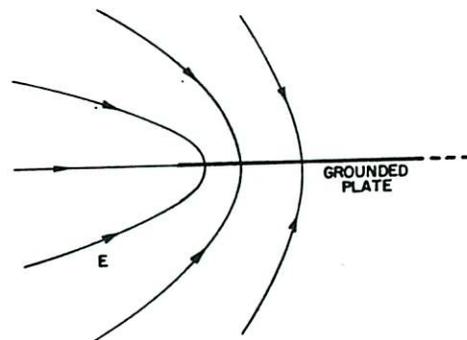


Fig. 7-5. The electric field near the edge of a thin grounded plate.

ELETTROMAGNETISMO

PARTE I

PIERO CALDIROLA
MARCELLO FONTANESI
ELIO SINDONI

SECONDA EDIZIONE

COPY n. 129367

MASTER n. 129139



MASSON ITALIA EDITORI
MILANO 1982

Facciamo notare che in questo caso la carica indotta, positiva o negativa, è in modulo uguale alla carica inducente. Si parla allora di *induzione completa*, fenomeno che in generale si verifica tutte le volte che il corpo inducente è racchiuso dal corpo sul quale si manifestano le cariche indotte. Per una configurazione generica dei corpi sui quali si distribuiscono le cariche, si ha che cariche indotte e cariche induttrici non hanno necessariamente lo stesso valore.

Le linee di forza per l'esempio da noi considerato sono quelle mostrate in Fig. 2.15 (b).

In un conduttore cavo dello stesso tipo di quello finora utilizzato, ma non contenente cariche nella cavità, il potenziale all'interno della cavità è costante ed eguale al potenziale del conduttore. Tale potenziale, pur variando al variare delle distribuzioni di cariche esterne, puntiformi o poste sui conduttori, si mantiene uguale in ogni punto del conduttore e della cavità. Risulta quindi impossibile produrre campi elettrici all'interno della cavità agendo dall'esterno. Il conduttore cavo rappresenta in queste condizioni uno *schermo elettrostatico*.

Qualora nella cavità vi fossero corpi carichi il campo elettrico interno sarebbe diverso da zero ma per quanto detto non potrebbe essere modificato dalla presenza di campi esterni.

L'unico effetto dei campi esterni sarebbe quello di far variare il potenziale di un valore costante in tutti i punti del volume occupato dal conduttore. Se inoltre si fa in modo di mantenere costante il potenziale del conduttore, per esempio collegandolo con la terra, all'interno della cavità non potranno essere rivelate in nessun modo variazioni di campo esterno.

Lo schermaggio elettrostatico è utilizzato quando si voglia isolare da influenze elettriche esterne strumenti di misura molto sensibili.

3

Problema generale dell'elettrostatica

3.1 Equazioni di Poisson

Come abbiamo già mostrato nel capitolo precedente il campo elettrostatico è completamente descritto dalle due equazioni differenziali:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (3.2)$$

valide qualunque sia la distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r})$, essendo \mathbf{r} il vettore che individua la posizione di un punto qualsiasi di coordinate cartesiane x, y, z .

La (3.2) implica che il campo elettrostatico può essere espresso come il gradiente di una funzione scalare. Secondo quanto mostrato nel paragrafo 2.5 abbiamo allora che:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (3.3)$$

Accoppiando le relazioni (3.1) e (3.3) otteniamo:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$

che, per mezzo della (1.60), può essere scritta nella forma:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.5)$$

È questa un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine nota sotto il nome di *equazione di Poisson*.

Nel caso che la sorgente del campo sia costituita unicamente da cariche elettriche distribuite in un volume finito V con densità $\rho(x, y, z)$, l'unica soluzione $\varphi(x, y, z)$ che si annulla all'infinito risulta data ¹⁾ da:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3.6)$$

relazione che avevamo già introdotto nel paragrafo 2.5.

Nel caso quindi che la distribuzione $\rho(x, y, z)$ sia una funzione nota il problema generale dell'elettrostatica, consistente nel calcolo del potenziale e del campo elettrico in ogni punto dello spazio, si riduce al calcolo dell'integrale contenuto nella relazione (3.6).

La presenza tuttavia di conduttori fa sì che, per il fenomeno dell'induzione elettrostatica, la distribuzione di carica sulla superficie dei conduttori non sia nota a priori. Per risolvere il problema dell'elettrostatica è allora necessario fare uso di altre considerazioni che permettono di mettere a punto opportuni procedimenti, alcuni dei quali verranno descritti in questo capitolo.

3.2 Equazione di Laplace e funzioni armoniche

Nella risoluzione dei problemi di elettrostatica, in cui la distribuzione di cariche non è completamente assegnata a priori, è di fondamentale importanza lo studio dell'*equazione di Laplace*

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.7)$$

valida in tutti i punti dello spazio ove $\rho(x, y, z) = 0$. Nella regione di spazio V , che supporremo finita, si dice che una funzione $\varphi(x, y, z)$ è *armonica* se essa è ivi finita e continua nelle derivate prime, ammette le derivate seconde e soddisfa all'equazione di Laplace $\nabla^2 \varphi = 0$.

Le funzioni armoniche soddisfano ad alcuni teoremi importanti.

1° *Teorema di unicità (problema di Dirichlet)*.

«Data una superficie S chiusa, la funzione armonica che sulla S assume un valore assegnato φ_S esiste, ed è univocamente determinata».

La dimostrazione si può conseguire facilmente ragionando per assurdo. Supponiamo, se è possibile, che esistano due di tali funzioni distinte l'una dall'altra: siano esse $\varphi_1(x, y, z)$ e $\varphi_2(x, y, z)$. Essendo esse per ipotesi armoniche soddisferanno le equazioni

¹⁾ Per la dimostrazione vedasi ad es. il testo «Classical Electrodynamics» di J. Jackson pag. 13.

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0. \quad (3.8)$$

Discendendo da queste che:

$$\nabla^2 (\varphi_1 - \varphi_2) = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (3.9)$$

sarà armonica anche la funzione $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Dovendo, sempre per ipotesi, φ_1 e φ_2 assumere su S un valore assegnato dovrà essere $\varphi_{1S} = \varphi_{2S}$, per cui $\varphi_S = 0$.

Tenendo conto allora che $\nabla^2 \varphi = 0$ e $\varphi_S = 0$, consideriamo la quantità $\text{div}(\varphi \text{ grad } \varphi)$, integriamo sul volume V , e applichiamo il teorema della divergenza:

$$\int_V \text{div}(\varphi \text{ grad } \varphi) dv = \int_S (\varphi \text{ grad } \varphi) \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.10)$$

L'integrale a destra, poiché la funzione φ è nulla su S , è uguale a zero. Utilizzando la relazione contenuta nella Tabella 1.1. possiamo sviluppare il termine $\text{div}(\varphi \text{ grad } \varphi)$ sotto segno di integrale ed ottenere:

$$\int_V \text{div}(\varphi \text{ grad } \varphi) dv = \int_V \varphi \nabla^2 \varphi dv + \int_V (\text{grad } \varphi)^2 dv = 0. \quad (3.11)$$

Poiché il termine $\nabla^2 \varphi$ è uguale a zero in ogni punto di V questa espressione si riduce a:

$$\int_V (\text{grad } \varphi)^2 dv = 0. \quad (3.12)$$

Essendo la funzione integranda una funzione continua positiva o nulla a integrale nullo, dovrà essere

$$\text{grad } \varphi = 0 \quad (3.13)$$

per cui risulterà $\varphi = \text{costante}$.

Ma essendo la φ nulla sulla superficie S , essa sarà allora nulla ovunque all'interno della regione V . Le due funzioni φ_1 e φ_2 saranno cioè ovunque eguali.

Il problema di determinare una funzione armonica $\varphi(x, y, z)$, di cui sia assegnato il valore in tutti i punti di una superficie S , dicesi *problema di Dirichlet* ¹⁾.

¹⁾ Riemann ha dimostrato che la funzione armonica definita nella regione V , la quale assume valori assegnati sulla superficie S , è quella, fra tutte le funzioni capaci di assumere questi valori, che rende minima l'espressione $\int_V (\text{grad } \varphi)^2 dv$. Dimostrato ciò, Riemann ha creduto di poter affermare che esiste certamente una funzione capace di rendere minima l'espressione precedente. Weierstrass ha però precisato che non sempre tale funzione esiste, perché si presentano casi in cui l'integrale in considerazione ammette un limite inferiore senza però avere un minimo.

2° Teorema di unicità. (Problema di Neumann).

«Se due funzioni armoniche, definite in una regione di volume V , sono tali che le loro derivate normali prendono valori assegnati sulla superficie S , esse differiscono per una costante».

Supposta infatti l'esistenza delle due funzioni armoniche $\varphi_1(x, y, z)$ e $\varphi_2(x, y, z)$, tali cioè che $\nabla^2 \varphi_1 = 0$ e $\nabla^2 \varphi_2 = 0$, discende l'armonicità della funzione $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ per cui $\nabla^2 \varphi = 0$. Siccome poi sulla superficie S per ipotesi $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ dovrà anche verificarsi che $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, sempre su S .

Ripetendo il procedimento usato nella dimostrazione del caso precedente abbiamo che l'integrale a destra nella relazione (3.10) è ora nullo perché su S si verifica che $\mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ è uguale a zero, per le ipotesi assunte sulle condizioni al contorno. Si ha allora di nuovo tramite la (3.11)

$$\int_V (\mathbf{grad} \varphi)^2 dv = 0$$

da cui, come già si è visto, deriva $\varphi(x, y, z) = \text{costante}$ su tutto il volume V , come volevamo dimostrare.

Si noti che i valori $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ della derivata normale di una funzione armonica non possono essere assegnati ad arbitrio su una superficie, nel campo in cui la funzione è armonica, dovendo soddisfare alla condizione:

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} da = 0 \quad (3.14)$$

che si ricava immediatamente considerando l'espressione:

$$\int_V \nabla^2 \varphi dv = \int_V \text{div} (\mathbf{grad} \varphi) dv = \int_S \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} da = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} da = 0. \quad (3.15)$$

Il problema della determinazione di una funzione armonica in una regione di volume V , della quale funzione si conoscono i valori $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ della derivata normale sulla superficie di V , dicesi *problema di Neumann*.

3° Teorema della media.

È dovuto a Gauss e afferma che il «valore medio che una funzione armonica $\varphi(x, y, z)$ assume su una superficie sferica qualsiasi, purché contenuta nella regione di armonicità di φ , è uguale al valore che la funzione $\varphi(x, y, z)$ assume nel centro della sfera».

Consideriamo una sfera di raggio r con centro in un punto P_0 , superficie S e volume V . Il valore medio della funzione $\varphi(x, y, z)$ sulla superficie sferica è:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \varphi da. \quad (3.16)$$

Utilizzando coordinate sferiche con centro in P_0 l'elemento infinitesimo di superficie si scrive $da = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ e avremo così che:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \varphi(r, \vartheta, \phi) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (3.17)$$

Una volta scelto il punto P_0 la funzione $\bar{\varphi}$, come risulta evidente dalla (3.17), può dipendere solo da r . Se deriviamo rispetto ad r , tenendo conto che le direzioni di \mathbf{r} e di \mathbf{n} , normale esterna, coincidono, si ha:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d\varphi}{dn} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \frac{d\varphi}{dn} da. \quad (3.18)$$

utilizzando la relazione (3.15), si ottiene:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = 0 \quad (3.19)$$

cioè:

$$\bar{\varphi} = \text{costante}. \quad (3.20)$$

Questo risultato è valido per una sfera di raggio qualsiasi centrata in P_0 e pertanto rimane valido anche se si fa tendere r a zero. Ma per $r \rightarrow 0$, $\bar{\varphi}$ tenderà a $\varphi(P_0)$ che rappresenta quindi il valore della costante introdotta precedentemente.

In conclusione si ottiene:

$$\bar{\varphi} = \varphi(P_0) \quad (3.21)$$

su qualsiasi superficie centrata in P_0 : il teorema della media risulta così dimostrato.

3.3 Funzione armonica fondamentale

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto fisso, $P(x, y, z)$ un punto variabile e r la distanza tra P_0 e P . Dimostriamo che la funzione $1/r$ è armonica in ogni campo che non contenga nel suo interno il punto P_0 .

Essendo:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad (3.22)$$

mostriamo che $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ cioè che $\text{div} \mathbf{grad} \frac{1}{r} = 0$.

Calcolando dapprima il gradiente si ha:

$$\text{grad} \frac{1}{r} = \text{grad} \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.23)$$

Possiamo verificare inoltre che le derivate $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right)$, $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$ sono finite e continue per $P \neq P_0$. Applicando alla (3.23) l'operatore divergenza troviamo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) &= \text{div} \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\text{div} \frac{(x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{3r^3 - 3r[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]}{r^6} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

come volevasi dimostrare.

Si noti che la funzione $1/r$, detta funzione armonica fondamentale, presenta una singolarità nel punto $r=0$ ove essa tende all'infinito; pertanto, come si vede dalla (3.24), in tal punto il suo laplaciano non risulta definito ¹⁾.

3.4 Considerazioni sulle proprietà del campo elettrico in relazione ai teoremi precedenti sulle funzioni armoniche

È ovvio che nel caso in cui si debba calcolare il campo elettrico generato da distribuzioni note di cariche espresse analiticamente dalla funzione densità $\rho(x, y, z)$, il metodo più diretto consista nel risolvere la (3.5) ovvero sia nell'applicare la formula (3.6). Ottenuto così il potenziale si potrà determinare per mezzo della (3.3) anche il campo elettrico corrispondente. Il metodo, come mostreremo nel paragrafo seguente, risulta applicabile anche per una distribuzione di cariche discrete puntiformi.

Nei casi invece in cui il campo in una certa regione dello spazio sia generato dalla presenza di cariche distribuite su conduttori, si procede in generale al calcolo del potenziale nei punti esterni ai conduttori risolvendo l'equazione di Laplace (3.7). Il problema viene in questo modo ricondotto alla ricerca di una soluzione di detta equazione, univocamente definita per mezzo della imposizione di adeguate *condizioni al contorno*. Sulla base dei due teoremi di univocità, dimostrati al paragrafo 3.2, si è così ricondotti alla soluzione di un problema di Dirichlet, se sono assegnati i valori che il potenziale assume sulle superficie dei conduttori presenti, o a un problema di Neumann, se sono assegnati i

¹⁾ Sul significato fisico di questo fatto vedasi paragrafo 3.5.

valori del campo elettrico su tali superficie o anche (per il teorema di Coulomb) della densità superficiale di carica.

L'univocità della soluzione, sia per il problema di Dirichlet sia per il problema di Neumann, permette di asserire che, trovata in un modo qualsiasi una soluzione dell'equazione di Laplace che soddisfa alle condizioni al contorno imposte per l'uno o per l'altro problema, essa è la soluzione del problema fisico della determinazione del campo elettrico.

Si osservi che la soluzione trovata per il problema di Dirichlet o per quello di Neumann fornisce il valore del potenziale nella regione di spazio esterna ai conduttori e sulle loro superfici, ma non dà alcuna informazione sul potenziale all'interno di questi: ciò è dovuto alla presenza delle cariche sulle superficie dei conduttori e alla conseguente discontinuità per le derivate normali del potenziale. Va tuttavia ricordato che, come abbiamo a suo tempo già dimostrato, all'interno dei corpi conduttori il potenziale è costante e uguale a quello della superficie.

È necessario inoltre distinguere tra problema *chiuso* e problema *aperto*. Come problema chiuso si intende quello in cui esista una superficie chiusa S che contenga tutti gli altri conduttori; evidentemente devono essere date anche le condizioni al contorno su S . Problema aperto è invece quello in cui la superficie S tende all'infinito. In questo caso va precisato il comportamento che il potenziale deve avere all'infinito. A tale scopo si introducono le *condizioni normali all'infinito* e precisamente:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \varphi(r) &= c_1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} &= c_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie e r è la distanza presa a partire dall'origine. Ciò significa che il potenziale e il campo elettrico si annullano all'infinito rispettivamente come $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^2}$.

Queste condizioni naturalmente sono valide sempreché all'infinito non siano presenti delle cariche.

Vogliamo ora illustrare il significato fisico connesso col teorema della media delle funzioni armoniche. Il fatto che dato un punto sulla superficie di una qualsiasi sfera centrata in P_0 si abbia

$$\bar{\varphi} = \varphi(P_0) \quad (3.26)$$

ci permette di affermare che il potenziale elettrico è una funzione che non ammette, entro la regione in cui è definito, punti di minimo o di massimo. Da questo fatto deriva immediatamente l'altra importante conseguenza che una carica isolata nel vuoto non può rimanere in equilibrio stabile per effetto del solo campo elettrostatico.

Cerchiamo di giustificare queste due affermazioni. Evidentemente se in un

punto P dello spazio esistesse un minimo (o un massimo) del potenziale avremmo che il valore medio di φ su una superficie sferica centrata attorno a P sarebbe senz'altro $\varphi > \varphi(P)$ [o $\varphi < \varphi(P)$] contrariamente a quanto afferma il teorema della media.

D'altra parte perché in un campo elettrostatico un punto nel vuoto sia di equilibrio stabile per una carica di prova è necessario che le linee di forza di E siano o tutte dirette verso il punto (carica di prova positiva), o tutte dirette dal punto verso l'esterno (carica di prova negativa) e questo non è possibile se nel punto, come abbiamo supposto, non esiste una carica sorgente del campo. Se consideriamo la Fig. 2.1 (b) notiamo che nel punto mediano tra le due cariche il campo elettrico è nullo. Questo potrebbe far credere che quel punto sia un punto di equilibrio stabile per una carica. Per convincersi del contrario basta pensare cosa succederebbe ad una carica di prova positiva, inizialmente ferma nel punto in questione, se fosse soggetta ad un piccolo spostamento da questa posizione. In effetti la carica tenderebbe ad allontanarsi sempre più dalla posizione iniziale, che quindi risulta essere di equilibrio instabile.

Dal teorema della media si deduce inoltre che se il potenziale ha un valore costante o nullo su una data superficie chiusa allora il potenziale assume lo stesso valore costante o nullo in tutto lo spazio contenuto entro la superficie.

Infine vogliamo far notare come il fatto che l'equazione di Laplace sia lineare possa essere di ausilio per la scelta della sua soluzione capace di soddisfare alle condizioni al contorno e quindi di determinare la funzione potenziale corrispondente a un determinato problema di elettrostatica.

Infatti se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono n soluzioni dell'equazione di Laplace, anche ogni combinazione lineare:

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n \quad (3.27)$$

dove a_1, a_2, \dots, a_n sono costanti arbitrarie, è ancora una soluzione della stessa equazione. I coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n possono quindi essere determinati in modo da soddisfare alle condizioni al contorno.

3.5 Caso di cariche puntiformi. - La funzione impropria δ di Dirac

In questo paragrafo mostreremo che, anche nel caso in cui il campo elettrico sia generato da una distribuzione discreta di cariche puntiformi, continuano a valere l'equazione di Poisson (3.5) e la sua soluzione (3.6), pur di definire opportunamente la funzione densità di carica $\rho(\mathbf{r})$ che corrisponde ad una carica puntiforme. Questo può essere ottenuto introducendo la cosiddetta funzione δ (delta) di Dirac.

Questa funzione, scritta nel caso unidimensionale nella forma $\delta(x - x_0)$, gode delle seguenti proprietà:

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{per} \quad x \neq x_0 \quad (3.28)$$

3.5]

CASO DI CARICHE PUNTIFORMI

57

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \text{ è contenuto nell'intervallo } x_1 x_2 \\ 0 & \text{se } x_0 \text{ non è contenuto nell'intervallo } x_1 x_2. \end{cases} \quad (3.29)$$

Si noti che a rigore la $\delta(x - x_0)$ non è dal punto di vista matematico una funzione nel senso ordinario ma una *distribuzione* (concetto questo che generalizza quello di funzione). Si suol dire che essa è una *funzione impropria*. Essa può anche essere definita come caso limite di funzioni ordinarie, ad esempio:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \{-l^2 (x - x_0)^2\}.$$

La $\delta(x - x_0)$ può cioè essere presentata come caso limite di una gaussiana racchiudente un'area unitaria (cioè tale che il suo integrale per x variabile da $-\infty$ a $+\infty$ è uguale a 1) che diventi sempre più stretta e più alta, in modo che finisca con l'essere nulla dovunque all'infuori di un intervallo infinitesimo centrato intorno al punto $x = x_0$ ove assume un valore tendente all'infinito (Fig. 3.1).

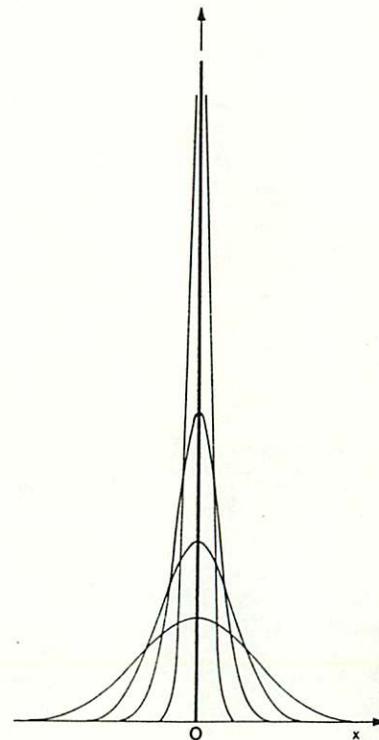


FIG. 3.1 - Gaussiana di area unitaria centrata intorno al punto $x=0$. Al limite la funzione è diversa da zero solo in un intervallo infinitesimo intorno al punto $x=0$ dove il suo valore tende all'infinito. Essa si riduce cioè alla $\delta(x)$.

Una importante proprietà della funzione δ è espressa mediante il seguente integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (3.30)$$

che fornisce un risultato diverso da zero sempre che il punto $x = x_0$ sia contenuto nel dominio d'integrazione. La funzione delta può essere anche definita in uno spazio a più dimensioni. Così ad esempio nel caso a tre dimensioni si ha:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (3.31)$$

essendo \mathbf{r} ed \mathbf{r}_0 i vettori, staccati da un'origine O , che individuano i punti $P(x, y, z)$ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$, per cui:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (3.32)$$

Valgono per questa funzione le proprietà già indicate per quella unidimensionale: la $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ha valore nullo ovunque tranne che nel punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, ed è tale che:

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = 1 \quad (3.33)$$

e

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = f(\mathbf{r}_0) \quad (3.34)$$

se la regione di integrazione contiene il punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

Prendiamo ora in considerazione il caso che il campo elettrico sia generato da una carica puntiforme q posta in un punto P_0 individuato dal vettore $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$.

Questa carica puntiforme può essere descritta, tramite la funzione delta, come una densità di carica volumetrica:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.35)$$

dovunque nulla eccetto che nel punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$.

Il calcolo del potenziale, può allora essere eseguito risolvendo l'equazione di Poisson ove si ponga per $\rho(\mathbf{r})$ la (3.35). Pertanto la sua soluzione sarà data dalla (3.6), che sostituendo a $\rho(\mathbf{r}')$ la densità di carica (3.35), diviene:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3.36)$$

essendo l'integrale esteso a un volume V qualsiasi contenente il punto P_0 . Questo integrale, tenendo conto della (3.34) e facendo attenzione al fatto che la variabile di integrazione è ora quella primata, è facilmente risolvibile e fornisce come risultato:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.37)$$

che è infatti l'espressione del potenziale di una carica puntiforme, introdotto precedentemente in maniera più elementare.

Il procedimento qui seguito per il caso della carica puntiforme può essere esteso in forma opportuna anche a quello di una densità di carica lineare o superficiale. Appare in tal modo più giustificata l'affermazione che l'integrale (3.6) rappresenti la soluzione dell'equazione di Poisson *qualunque sia la distribuzione di carica*, in assenza tuttavia di condizioni al contorno.

Il procedimento illustrato per una carica puntiforme, può immediatamente essere generalizzato per il caso di una distribuzione di un certo numero finito N di cariche puntiformi.

3.6 Metodo delle cariche immagini

In alcuni problemi di elettrostatica, concernenti cariche puntiformi in presenza di condizioni al contorno, cioè di superficie conduttrici, è possibile determinare il potenziale senza dover risolvere una equazione differenziale per mezzo del cosiddetto *metodo delle cariche immagini*.

Il metodo consiste nel sostituire il conduttore con una opportuna distribuzione di cariche, dette *cariche immagini*, situate in modo che la superficie geometrica occupata dal conduttore risulti ancora una superficie equipotenziale con valore del potenziale immutato. Per l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con determinate condizioni al contorno possiamo affermare che il potenziale generato dal sistema cariche puntiformi più cariche immagini coincide, nella regione esterna al conduttore, con il potenziale generato dal sistema effettivo cariche puntiformi con le condizioni al contorno assegnate. Le cariche immagini devono essere localizzate all'esterno della regione nella quale si vuole determinare il potenziale, perché quest'ultimo deve sempre soddisfare all'equazione di Laplace e i punti ove sono poste le cariche immagini rappresentano punti di singolarità.

a) Carica puntiforme e piano conduttore infinito

Come primo esempio di applicazione del metodo delle immagini consideriamo una carica puntiforme $+q$ ad una distanza d da un piano conduttore S infinitamente esteso e posto a potenziale zero. Il problema consiste nel determinare il potenziale $\varphi(x, y, z)$ nel semispazio contenente la carica $+q$.

È immediato verificare che la superficie geometrica occupata dal conduttore è ancora una superficie equipotenziale con valore nullo del potenziale, qualora si ponga una carica immagine $-q$ speculare della carica $+q$ rispetto al piano S , come mostrato in Fig. 3.2.

Infatti il potenziale generato dalle cariche $+q$ e $-q$ in un punto arbitrario P di coordinate x, y, z rispetto all'origine O , è dato da:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right) \quad (3.38)$$

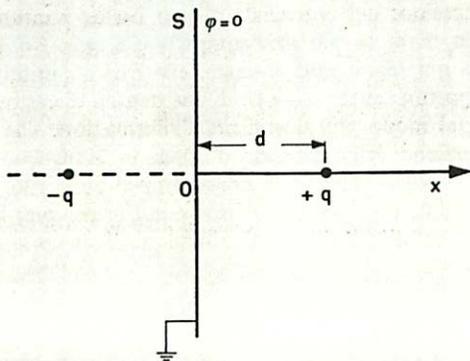


FIG. 3.2 - Carica puntiforme $+q$ affacciata ad un piano conduttore tenuto a potenziale nullo. La carica $+q$ e la sua immagine $-q$ rendono il piano S equipotenziale con $\varphi = 0$.

e tale potenziale è nullo per tutti i punti del piano S per i quali è $x = 0$. Pertanto il problema di determinare nel semispazio a destra il potenziale dovuto al sistema carica puntiforme e piano conduttore S può essere risolto calcolando il potenziale creato nello stesso semispazio dal sistema carica puntiforme $+q$ e carica immagine $-q$. La relazione (3.38) rappresenta quindi la soluzione del problema.

Determiniamo ora la densità superficiale di carica indotta sul piano S dalla carica puntiforme $+q$. A questo scopo ricaviamo la componente normale al piano conduttore del campo elettrico E ; questa è data da:

$$E_x(0, y, z) = -\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.39)$$

Per il teorema di Coulomb la densità superficiale di carica risulta essere:

$$\sigma = \epsilon_0 E_x = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.40)$$

Integrando la densità σ su tutta la superficie S , operando l'opportuno cambiamento di variabile $(y^2 + z^2)^{1/2} = r$ e suddividendo il piano in corone circolari centrate in O di area $da = 2\pi r dr$, si ha:

$$\int_S \sigma da = \int_0^\infty -\frac{qd}{2\pi(d^2 + r^2)^{3/2}} 2\pi r dr = -q. \quad (3.41)$$

La carica totale indotta sulla superficie conduttrice S è quindi uguale in valore e di segno opposto alla carica puntiforme $+q$. Questo risultato era preve-

dibile tenendo conto del fatto che il problema in questione rappresenta un esempio di induzione completa, dato che tutte le linee di forza uscenti dalla carica $+q$ sono intercettate dalla superficie conduttrice S .

b) Carica puntiforme e sfera conduttrice

Un esempio più complesso di applicazione del metodo delle immagini è quello del calcolo del potenziale generato da una carica puntiforme in presenza di una sfera conduttrice collegata a terra, cioè a potenziale zero.

Sia data una sfera conduttrice di raggio R ed una carica puntiforme q posta ad una distanza a dal centro O della sfera. Il calcolo del potenziale prodotto da un tale sistema può essere ottenuto risolvendo il problema del potenziale generato dalla carica q e da una opportuna carica immagine q' . Questa carica dovrà essere situata, per quanto detto all'inizio di questo paragrafo, all'interno della superficie sferica di raggio R centrata in O e per ragioni di simmetria sulla retta congiungente la carica q ed il punto O come mostrato in Fig. 3.3. Il valore della carica q' e la sua distanza b dal punto O andranno determinati in modo che il potenziale generato sulla superficie sferica da q e q' sia nullo. Utilizzando coordinate sferiche con centro in O , il potenziale $\varphi(r, \vartheta, \phi)$ prodotto in un punto P distante r_1 da q e r_2 da q' è:

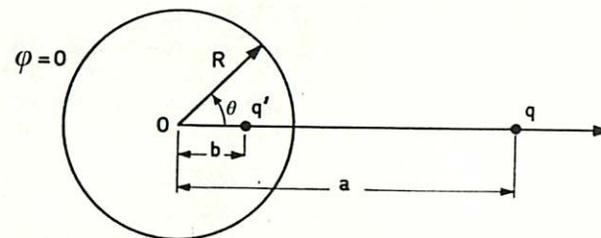


FIG. 3.3 - Applicazione del metodo delle immagini al caso di una carica puntiforme q in presenza di una superficie sferica conduttrice con potenziale nullo.

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (3.42)$$

Se il punto P giace sulla superficie sferica di raggio R la (3.42) può essere scritta nella forma:

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta)^{1/2}} + \frac{q'}{(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \vartheta)^{1/2}} \right] \quad (3.43)$$

e questa quantità è nulla per qualunque valore di ϑ solo se i due denominatori sono funzioni simili di ϑ . Questo è possibile se noi scegliamo $\frac{b}{R} = \frac{R}{a}$. Avremo allora:

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + \left(\frac{a}{R}\right)q'}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta)^{1/2}} \quad (3.44)$$

che si annulla se $q' = -\left(\frac{R}{a}\right)q$.

Concludiamo così che il calcolo del potenziale generato dal sistema carica q e sfera conduttrice con potenziale nullo può essere eseguito considerando, anziché il sistema effettivo, quello costituito dalla carica q e da una carica immagine q' di grandezza uguale a $-\frac{R}{a}q$ posta ad una distanza $b = \frac{R^2}{a}$ dal centro della sfera. Si può dimostrare, eseguendo l'integrale sulla superficie della sfera della densità di carica indotta, che la carica totale su di essa è uguale alla carica immagine q' . Nel caso in cui la sfera conduttrice sia isolata e carica, per cui il suo potenziale risulti uguale a un valore φ_0 assegnato, è possibile ancora determinare il potenziale nei vari punti dello spazio esterni alla sfera col metodo delle cariche immagini. Basterà porre una seconda carica immagine di valore q'' al centro della sfera. Il potenziale della superficie sferica sarà allora la somma del potenziale $\varphi = 0$ del problema precedente più il potenziale $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R}$ generato dalla nuova carica immagine q'' ; la carica totale distribuita sulla sfera risulterà essere $q' + q''$. Il valore di q'' deve essere tale da rendere il potenziale della sfera uguale al valore assegnato φ_0 . Prendendo $q'' = -q'$ può essere risolto il caso particolare relativo alla sfera conduttrice isolata scarica.

3.7 Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cartesiane

Le equazioni di Laplace e di Poisson, essendo equazioni differenziali alle derivate parziali, presentano in genere notevoli difficoltà di soluzione. Tenendo conto delle considerazioni fatte all'inizio del paragrafo 3.4, ci limiteremo a risolvere in alcuni casi l'equazione di Laplace, trattando cioè problemi in regioni dello spazio dove non vi siano cariche. La presenza di conduttori carichi fornirà le condizioni al contorno per le soluzioni dell'equazione.

Cerchiamo innanzitutto una soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate cartesiane, utilizzando il metodo della separazione delle variabili; tale metodo consiste nel ridurre l'equazione data in tre equazioni, in ognuna delle quali compaia soltanto una delle tre variabili. L'equazione di Laplace, in coordinate cartesiane ortogonali, assume la forma:

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.45)$$

Poniamo ora

$$\varphi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z); \quad (3.46)$$

sostituendo nella (3.45) si ottiene

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (3.47)$$

e dividendo per XYZ si ha:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (3.48)$$

La (3.48) deve essere valida per qualunque valore delle variabili indipendenti x, y, z . Essendo i tre termini funzioni rispettivamente della sola x , della sola y e della sola z , dovranno valere le equazioni:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_z^2 \quad (3.49)$$

dove le costanti k_x^2, k_y^2, k_z^2 devono soddisfare la condizione:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0. \quad (3.50)$$

Dalla (3.50) appare l'impossibilità per le costanti k_x, k_y, k_z di assumere tutti valori reali o valori immaginari.

Risolviamo la prima delle (3.49):

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2 X. \quad (3.51)$$

Per k_x reale non nullo, la soluzione generale è data da:

$$X = Ae^{k_x x} + Be^{-k_x x}. \quad (3.52)$$

Per k_x immaginario non nullo, ponendo $k_x = jk'_x$ la (3.51) diviene:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x'^2 X \quad (3.53)$$

per cui, dovendo il potenziale essere una funzione reale, l'integrale generale può essere scritto:

$$X = A \sin k'_x x + B \cos k'_x x. \quad (3.54)$$

Infine per $k_x = 0$, si ottiene come soluzione l'espressione:

$$X = A_0 x + B_0. \quad (3.55)$$

Quanto detto per la funzione X può essere ripetuto per le funzioni Y e Z , con l'avvertenza che la condizione (3.50) implica, nel caso in cui tutte e tre le costanti siano diverse da zero, che vi sia una soluzione parziale del tipo (3.52), cioè esponenziale, corrispondente ad un valore reale di una delle costanti, una soluzione del tipo (3.54), cioè trigonometrica, in corrispondenza di un valore immaginario della costante, ed una soluzione dell'uno o dell'altro tipo.

Se una delle costanti è nulla, avremo una soluzione lineare, una esponenziale ed una trigonometrica.

Una soluzione completa, nel caso di costanti non nulle, si scriverà in genere:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \\ = & (A \operatorname{sen} k_x x + B \cos k_x x) (C \operatorname{sen} k_y y + D \cos k_y y) (E e^{-(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} z} + F e^{(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} z}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

il valore delle costanti dipendendo ovviamente dal tipo di problema, cioè dal tipo di condizioni al contorno da soddisfare.

Applicheremo ora quanto esposto al calcolo del potenziale elettrostatico in alcuni casi.

a) Caso monodimensionale

Supporremo che le condizioni al contorno siano del tipo di Dirichlet.

Dati due conduttori piani 1 e 2, affacciati, indefinitamente estesi, posti a distanza d , tenuti rispettivamente ai potenziali φ_1 e φ_2 con $\varphi_1 > \varphi_2$, calcoliamo in tutto lo spazio il valore del potenziale e del campo elettrico, nonché la distribuzione di carica superficiale sui due conduttori. Assumiamo un sistema di assi cartesiani con l'asse x orientato normalmente ai due piani, che risultano essere paralleli al piano yz ; l'origine degli assi sia posta in un punto del piano conduttore 1. Poiché la funzione potenziale dipende chiaramente solo dalla coordinata x , l'equazione di Laplace si riduce alla forma $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$. Siamo cioè nel caso: $\frac{d}{dy} = \frac{d}{dz} = 0$, $k_x = 0$; la soluzione è allora data dalla (3.55)

$$\varphi(x) = A_0 x + B_0 \quad (3.57)$$

dove A_0 e B_0 sono due costanti da determinare imponendo le condizioni al contorno rappresentate dai valori φ_1 e φ_2 assunti dal potenziale sui due piani conduttori.

Per $x = 0$ dovrà verificarsi che:

$$\varphi(0) = \varphi_1 = B_0 \quad (3.58)$$

e per $x = d$ dovrà essere:

$$\varphi(d) = \varphi_2 = A_0 d + B_0. \quad (3.59)$$

Da queste relazioni si ricava che $B_0 = \varphi_1$ e $A_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$. L'espressione del potenziale risulta essere in definitiva la seguente:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} x + \varphi_1. \quad (3.60)$$

Tale soluzione è valida solo per valori di x compresi tra 0 e d . Nelle zone esterne ai due piani, che essendo i piani infiniti possono essere considerate come regioni interne di conduttori, il potenziale è uniforme e uguale al valore che si ha sul piano corrispondente. L'andamento del potenziale è quello mostrato in Fig. 3.4

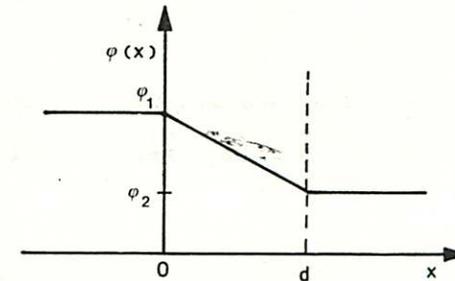


Fig. 3.4 - Andamento del potenziale elettrico generato da due piani conduttori carichi infinitamente estesi posti nei punti $x=0$ ed $x=d$.

Il campo elettrico viene determinato applicando alla relazione (3.60) l'operatore gradiente e cambiando di segno; tenendo conto che il potenziale dipende solo dalla variabile x , abbiamo:

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \mathbf{i}. \quad (3.61)$$

La direzione del campo elettrico è quella che va dal piano a potenziale maggiore a quello a potenziale minore. Si può notare inoltre come il campo elettrico all'interno dei piani conduttori sia uniforme e come esso sia nullo all'esterno di detti piani. La densità superficiale di carica dei piani conduttori può essere ricavata utilizzando il teorema di Coulomb:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \epsilon_0. \quad (3.62)$$

Il valore del modulo della densità di carica σ è lo stesso sui due piani, mentre il segno è positivo o negativo a seconda che la direzione del campo elettrico sia quella uscente o quella entrante rispetto al piano considerato.

b) Caso bidimensionale

Il potenziale sarà funzionale solo di x e di y .

L'equazione di Laplace si scrive pertanto:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.63)$$

Sia inoltre data la seguente condizione al contorno: sul piano $y=0$, si abbia

$$\varphi = \varphi_0 \cos \beta x. \quad (3.64)$$

Essendo φ indipendente da z e $k_z=0$, conservando le stesse notazioni della (3.46) avremo $Z=A_0 z + B_0$, ma, non dovendo φ dipendere dalla variabile z , possiamo prendere $A_0=0$, $B_0=1$ (scelta arbitraria).

Inoltre la (3.64) suggerisce per X una soluzione della forma:

$$X = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad (3.65)$$

e di conseguenza $k_x = \beta$, $-k_x^2 + k_y^2 = -\beta^2 + k_y^2 = 0$, $k_y = \pm \beta$.

La soluzione completa sarà allora della forma:

$$\varphi = (A \sin \beta x + B \cos \beta x) (C e^{\beta y} + D e^{-\beta y}) \quad (3.66)$$

Le condizioni al contorno richiedono che φ si annulli all'infinito. Deve quindi essere, per $y > 0$, $C=0$. Infine la condizione su $y=0$ richiede che si operi la scelta $A=0$, $B=\varphi_0$, $D=1$.

Possiamo allora scrivere, per $y \geq 0$, la soluzione:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \beta x e^{-\beta y} \quad (y \geq 0)$$

per $y < 0$ è necessario assumere $C=1$ e $D=0$, onde la soluzione è:

$$\varphi = \varphi_0 e^{\beta y} \cos \beta x \quad (y < 0).$$

3.8 Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche

Assumiamo un sistema di coordinate sferiche come mostrato in Fig. 3.5.

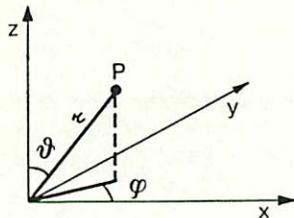


FIG. 3.5 - Sistema di coordinate sferiche

L'equazione di Laplace in coordinate sferiche si scrive:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(r, \vartheta, \phi) = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Cerchiamo una soluzione con il procedimento della separazione di variabili, ponendo cioè:

$$\varphi(r, \vartheta, \phi) = R(r) P(\vartheta) Z(\phi). \quad (3.68)$$

Dividendo per RPZ e moltiplicando per $r^2 \sin^2 \vartheta$ si ottiene:

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{P} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\phi^2} = 0; \quad (3.69)$$

i primi due termini della (3.69) sono funzionali solo di ϑ e di Z , mentre l'ultimo termine è funzione di ϕ .

Devono quindi valere le relazioni:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\phi^2} = -m^2 \quad (3.70)$$

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{P} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) = m^2. \quad (3.71)$$

Quest'ultima, dividendo per $\sin^2 \vartheta$, si può scrivere:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = 0 \quad (3.72)$$

dove il primo termine è funzione della sola r , e gli ultimi due della sola ϑ .

Le soluzioni della (3.70) nel caso di m reale o nullo sono date da:

$$Z = A \sin m\phi + B \cos m\phi \quad (m \neq 0) \quad (3.73)$$

$$Z = G\phi + H \quad (m = 0)$$

Consideriamo dapprima il caso $m=0$. Dalla (3.72) si ottiene:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{P \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right). \quad (3.74)$$

Essendo i due membri della (3.74) rispettivamente funzioni soltanto di r e di ϑ , è possibile eguagliare entrambi ad una costante n di separazione. L'equazione in ϑ diviene: