

**MAGNETOSTATICA
NEL
VUOTO**

Magnetostatica nel moto

- forza di Lorentz $\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}$ $\omega = \frac{qB}{m}$
- seconda formula di Laplace $d\underline{F} = i d\underline{\ell} \times \underline{B}$ 
- $B = \text{induzione magnetica} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \text{Tesla} = \frac{\text{Weber}}{m^2} = 10^4 \text{ Gauss}$
- legge di Biot-Savart $\underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i \times \underline{r}}{r^2}$
- prima formula di Laplace $d\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\underline{\ell} \times \underline{r}}{r^3}$
$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J} \times \underline{r}}{r^3} d^3r$$
- campo generato da una carica in moto
 $\underline{J}(\underline{r}) = q \underline{v}(\underline{x}) \delta(\underline{r} - \underline{x})$ $\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\underline{v} \times \underline{x}}{x^3} = \epsilon_0 \mu_0 \underline{v} \times \underline{E}$
- $[\mu_0] = \frac{\Omega \cdot s}{m} = \text{Henry } m^{-1}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry } m^{-1}$
- forza tra due fili paralleli di lunghezza l_1 ed l_2 e distanti a
$$\underline{F} = l_1 \underline{i}_1 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\underline{i}_2 \times \underline{a}}{a^2} = - \frac{\mu_0}{2\pi} (\underline{i}_1 \cdot \underline{i}_2) \hat{a} \frac{l_1 l_2}{a}$$

- $\oint (\underline{B}) = 0$ $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ assenza di sorgenti

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J} \times \underline{r}}{r^3} d^3r$$

- $\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 \sum i$

$$\int_S \nabla \times \underline{B} \cdot \underline{n} dS = \mu_0 \int \underline{J} \cdot \underline{n} dS \quad \text{legge di Ampere}$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$$

- $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

nella gauge di Coulomb $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} \Rightarrow \nabla^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{J}$$

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'$$

Differential Equations of Magnetostatic

The magnetic induction generated by a current density $\underline{J}(\underline{x})$ is

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underline{J}(\underline{x}') \times \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x'$$

by using $\underline{\nabla} \times (\rho \underline{v}) = (\underline{\nabla} \rho) \times \underline{v} + \rho (\underline{\nabla} \times \underline{v})$

and $\underline{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) = - \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3}$ $\underline{\nabla} \times \underline{J} = \underline{\nabla} \times \sigma \underline{E} = 0$

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\nabla} \times \int \frac{\underline{J}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'$$

then $\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{B}(\underline{x}) = 0}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\nabla} \times \left(\underline{\nabla} \times \int \frac{\underline{J}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' \right)$$

by using $\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) = \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) - \underline{\nabla}^2 \underline{v}$ and

$$\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = \underline{\nabla} \rho \cdot \underline{v} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\nabla} \int \underline{J}(\underline{x}') \cdot \underline{\nabla} \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) d^3x' -$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underline{J}(\underline{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) d^3x'$$

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}} \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) = - \underline{\nabla}_{\underline{x}'} \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\underline{x} - \underline{x}')$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{x}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\nabla} \int \underline{J}(\underline{x}') \cdot \underline{\nabla}' \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) d^3x' + \mu_0 \underline{J}(\underline{x}) = \text{integrating by parts}$$

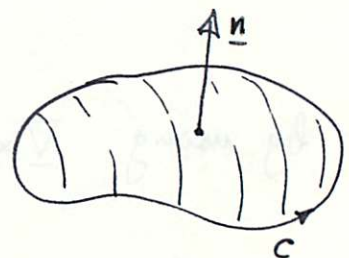
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\nabla} \int \frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{J}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' + \mu_0 \underline{J}(\underline{x})$$

$$= \mu_0 \underline{J}(\underline{x})$$

because in a steady-state $\underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0$

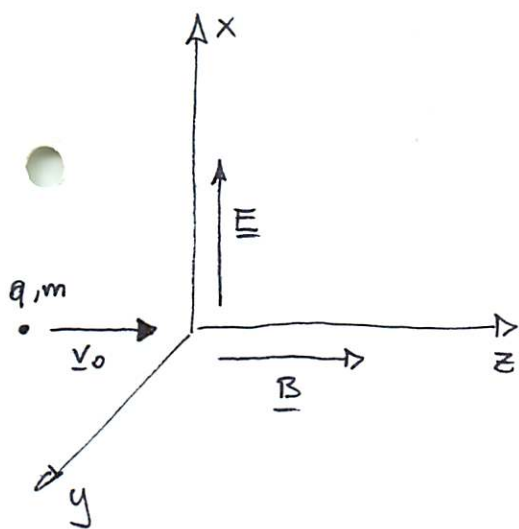
$$\int_S \mu_0 \underline{J} \cdot \underline{n} dS = \mu_0 I =$$

$$= \int_S \underline{\nabla} \times \underline{B} \cdot \underline{n} dS = \int_C \underline{B} \cdot d\underline{\ell}$$



Ampere law.

(1)



$$\underline{x}(0) = (0, 0, 0)$$

$$\underline{\dot{x}}(0) = (0, 0, v_0)$$

$$\underline{E} = (E, 0, 0)$$

$$\underline{B} = (0, 0, B)$$

$$m \underline{\ddot{x}} = q \underline{E} + q \underline{\dot{x}} \times \underline{B}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(0) = v_0$$

$$z(t) = z(0) + v_0 t = v_0 t$$

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -\frac{qB}{m} [x(t) - x(0)] \quad \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m} x(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{qE}{m}$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{qE}{m\omega^2}$$

$$\begin{cases} x(0) = A + \frac{mE}{qB^2} = 0 \\ \dot{x}(0) = B\omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{mE}{qB^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{mE}{qB^2} [1 - \cos(\omega t)]$$

$$y(t) - y(0) = -\frac{qB}{m} \frac{mE}{qB^2} \left[t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

$$y(t) = -\frac{E}{B} t + \frac{E}{B} \frac{m}{qB} \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mE}{qB^2} [1 - \cos(\omega t)] \\ y(t) = \frac{mE}{qB^2} \sin(\omega t) - \frac{E}{B} t \\ z(t) = v_0 t \end{cases}$$

La conica descrive un cerchio di raggio $\frac{mE}{qB^2} = R$ nel piano xy

e entro all'istante t $\underline{C} \equiv \left(-\frac{mE}{qB}, \frac{E}{B} t, v_0 t \right)$ infatti:

$$(\underline{x} - \underline{C})^2 = R^2$$

$$\left(\frac{mE}{qB^2} [1 - \cos(\omega t)] + \frac{mE}{qB} \right)^2 + \left(\frac{mE}{qB^2} \sin(\omega t) \right)^2 = \left(\frac{mE}{qB^2} \right)^2$$

$$\left(\frac{mE}{qB^2} \right)^2 (1 - \cos(\omega t) + \cos(\omega t))^2 + \left(\frac{mE}{qB^2} \right)^2 \sin^2(\omega t) = \left(\frac{mE}{qB^2} \right)^2$$

$$\left(\frac{mE}{qB^2} \right)^2 (1 - \cos(\omega t) + \cos(\omega t))^2 + \left(\frac{mE}{qB^2} \right)^2 \sin^2(\omega t) = \left(\frac{mE}{qB^2} \right)^2$$

$$V(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\left(\frac{mE}{qB^2}\right)^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + \left[\frac{mE}{qB^2} \omega \cos(\omega t) - \frac{E}{B}\right]^2 + v_0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{E^2}{B^2} \sin^2 \omega t + \frac{E^2}{B^2} (\cos^2 \omega t + 1 - 2 \cos \omega t) + v_0^2} =$$

$$= \sqrt{2 \frac{E^2}{B^2} [-\cos \omega t + 1] + v_0^2}$$

$$T(t) - T(0) = \frac{1}{2} m v(t)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m \frac{E^2}{B^2} [1 - \cos(\omega t)]$$

$$L(t) = \int_0^t qE \dot{x}(t') dt' = qE \frac{mE}{qB^2} \omega \int_0^t \sin \omega t' dt' =$$

$$= m \frac{E^2}{B^2} [-\cos \omega t']_0^t = m \frac{E^2}{B^2} [1 - \cos(\omega t)] = T(t) - T(0)$$

Il campo $\underline{B}$ non compie lavoro sulla particella

$$dL = qB \dot{y} \dot{x} dt - qB \dot{x} \dot{y} dt = 0$$

tuttavia influenza il lavoro compiuto dal campo elettrico cambiando ~~la~~ la direzione di $\underline{v}$

si consideri ora:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t) + \frac{qB}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$z(t) = v_0 t$$

$$\dot{y} = -\frac{qB}{m} x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

soluzione particolare

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t)$$

$$-C \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \omega^2 C \cos(\omega_0 t) = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

$$C = \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

soluzione generale

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t$$

$$\begin{cases} x(0) = A + \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} = 0 \\ \dot{x}(0) = B\omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

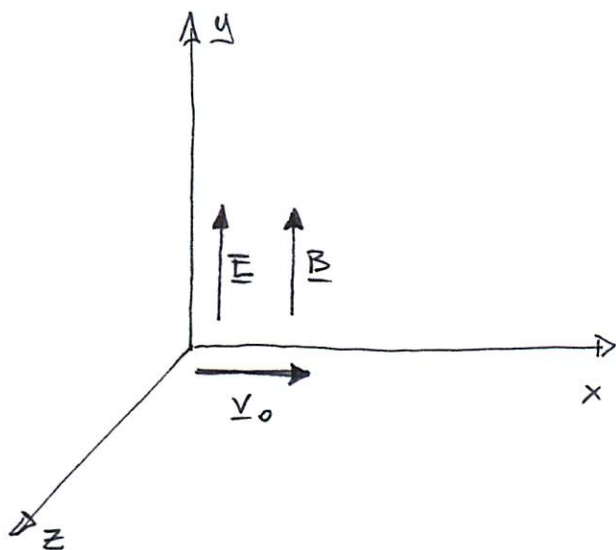
$$x(t) = \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)]$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= - \frac{qB}{m} \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) = \\
 &= - \omega \frac{qE_0/m}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} \frac{\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t}{\omega \omega_0} = \\
 &= \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)
 \end{aligned}$$

la iona colpisce ~~lo~~ schermo a $t = \frac{z}{v_0}$ nel punto

$$x = \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \left[\cos\left(\omega_0 \frac{z}{v_0}\right) - \cos\left(\frac{\omega z}{v_0}\right) \right]$$

$$y = \frac{qE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \left[\sin\left(\frac{\omega z}{v_0}\right) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin\left(\frac{\omega_0 z}{v_0}\right) \right]$$



Moto in campi $\underline{E}$ e $\underline{B}$ paralleli
di una carica q con massa m

$$\underline{E} = (0, E, 0) \quad \underline{B} = (0, B, 0)$$

$$\underline{x}(0) = (0, 0, 0) \quad \dot{\underline{x}}(0) = (v_0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\frac{q}{m} \dot{z}(t) B \\ \ddot{y}(t) = \frac{q}{m} E \\ \ddot{z}(t) = \frac{q}{m} \dot{x}(t) B \end{cases}$$

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = \frac{qB}{m} [x(t) - x(0)]$$

$$\dot{z}(t) = \frac{qB}{m} x(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x(t) = 0$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} x(0) = A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \omega B = v_0 \\ A = 0 \\ B = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$$

$$z(t) = z(0) + \omega \int_0^t x(t') dt'$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{qE}{2m} t^2 \\ z(t) = \frac{v_0}{\omega} [1 - \cos \omega t] \end{cases}$$

$$\omega \equiv \frac{qB}{m}$$

- per $\omega t \ll 1$ (metodo delle potenze)

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \omega t = v_0 t$$

$$y(t) = \frac{qE}{2m} t^2$$

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega} \left[1 - \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right) \right] = \frac{v_0 \omega}{2} t^2 = \frac{qB v_0}{2m} t^2$$

$$y = \frac{2mE}{qB^2 x^2} z^2$$

indipendentemente da v_0 , ioni con lo stesso rapporto q/m raggiungono uno stesso $x = x_0$ lungo una parabola

$$y = \frac{\cos t}{q/m} z^2$$

- per $E=0$ la traiettoria giace sul piano $y=0$

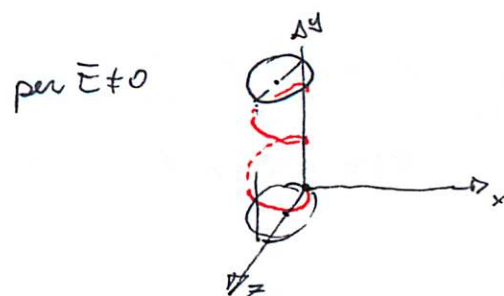
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

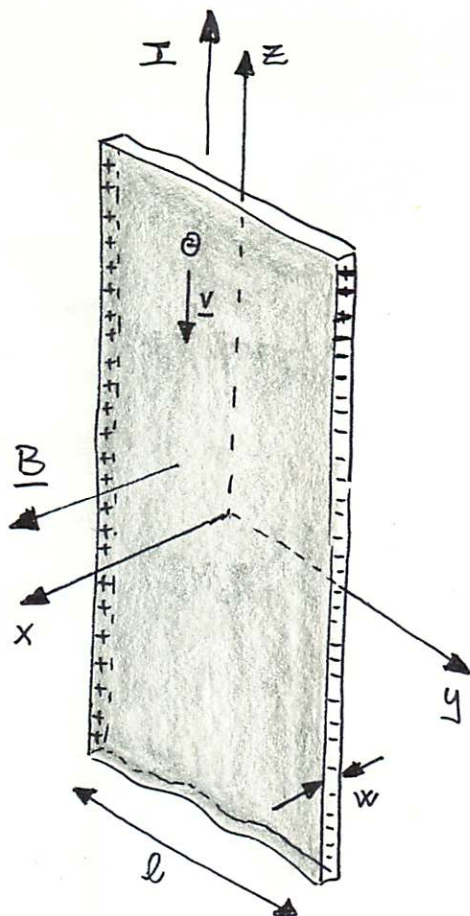
$$z(t) = \frac{v_0}{\omega} - \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

si tratta di un cerchio centrato in $C \equiv (0, 0, \frac{v_0}{\omega})$

$$\text{e raggio } R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB}$$

$$\left[x(t) - 0 \right]^2 + \left[z(t) - \frac{v_0}{\omega} \right]^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}$$





Effetto Hall (classico)

Una striscia di rame di spessore w e lunghezza l è posta in un campo $\underline{B}$ perpendicolare. Lungo la striscia c'è una corrente I . Conoscendo il peso specifico ρ del rame e la massa dell'atomo di Cu $M_{Cu} = 63.54 \text{ a.m.u. } (\approx 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg})$ determinare il campo elettrico trasverso (Cu è monovalente).

$$\underline{F}_B = -e \underline{v} \times \underline{B} = (0, e v B, 0) \Rightarrow \underline{E}_H = (0, E_H, 0)$$

$$\underline{F}_H = -e \underline{E}_H = (0, -e E_H, 0)$$

all'equilibrio

$$e v B - e E_H = 0$$

$$\boxed{E_H = v B}$$

$$I = n e v (w l)$$

n = densità di elettroni di conduzione.

$$n = \frac{\rho}{M_{Cu}} \cdot 1$$

$$v = \frac{I}{n e w l} = \frac{I M_{Cu}}{\rho e w l}$$

$$\boxed{\underline{E}_H = \frac{B I M_{Cu}}{e \rho w l}}$$

$$I = 100 \text{ A}$$

$$B = 1.75 \text{ T}$$

$$W = 1.25 \text{ mm}$$

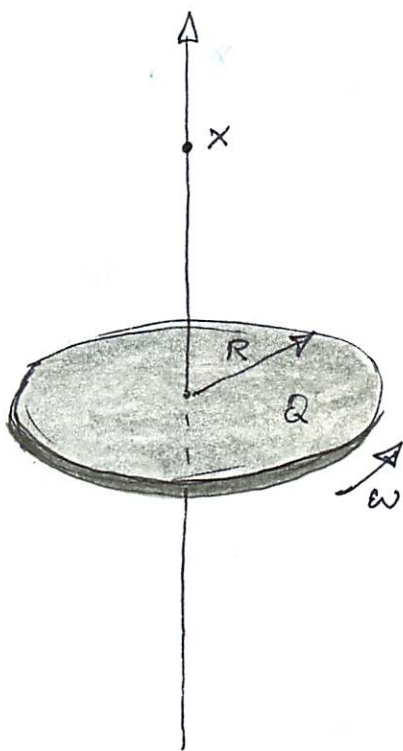
$$l = 0.15 \text{ m}$$

$$\rho = 8.92 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$M_{cu} = 1.05 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

$$E_H = 69 \text{ } \mu\text{Vm}^{-1}$$





Un disco metallico di raggio R è posto in rotazione intorno al proprio asse con velocità angolare ω . Il disco è nel vuoto ed è uniformemente carico con carica Q .
Travare l'induzione magnetica generata nei punti dell'asse, trascurando la variazione di uniformità della carica.

La corona circolare di raggi r ed $r+dr$

contiene una carica $dQ = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2Qr}{R^2} dr$

questa carica ruota con un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

quindi rappresenta una spira circolare di raggio r percorsa da corrente

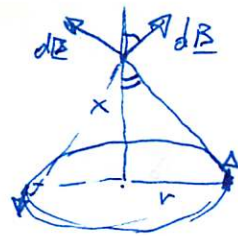
$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\omega Q r}{\pi R^2} dr$$

In un punto dell'asse del disco a distanza x

il campo $\underline{B}$ ha la direzione dell'asse (di $\underline{\omega}$ se $Q > 0$

$\underline{B} \propto -\underline{\omega}$ se $Q < 0$) e vale

$$dB(x) = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$



$$B(x) = \int dB = \frac{\mu_0}{2} \int_0^R \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \frac{\omega Q r}{\pi R^2} dr =$$

$$= \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr =$$

$$= \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \left\{ \left[r^2 \cdot \frac{-1}{(r^2 + x^2)^{1/2}} \right]_0^R + \int_0^R \frac{2r}{(r^2 + x^2)^{1/2}} dr \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \left\{ - \frac{R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \left[2\sqrt{r^2 + x^2} \right]_0^R \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \left\{ - \frac{R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} + 2\sqrt{R^2 + x^2} - 2\sqrt{x^2} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \left[2x \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right) - \frac{R^2}{x\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right]$$

per $\frac{R}{x} \ll 1$

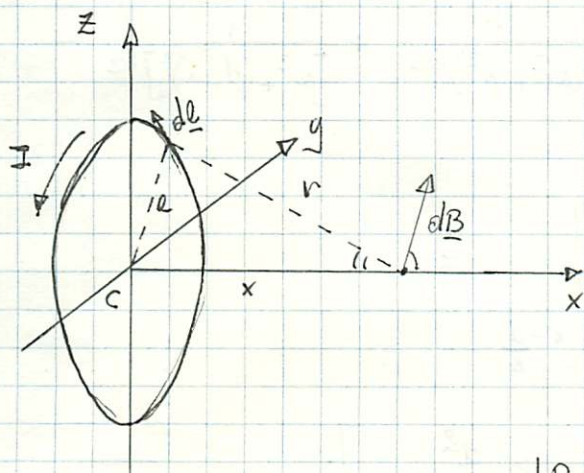
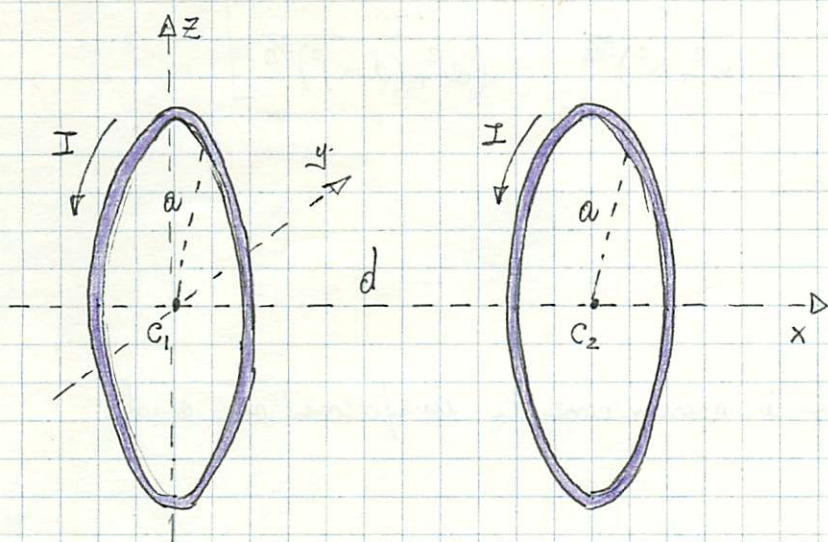
$$B(x) = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \left[2x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} - \frac{1}{8} \frac{R^4}{x^4} - \dots \right) - \frac{R^2}{x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} \right) \right]$$

$$= \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} \frac{1}{4} \frac{R^4}{x^3} = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{8\pi x^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^{\frac{5}{2}} (Q\omega/2\pi)}{x^3}$$

Due bobine di Helmholtz costituite da N spire circolari di raggio a sono percorse dalla stessa corrente I circolante nello stesso verso.

La distanza tra i centri delle bobine, parallela, è d . Calcolare

B lungo l'asse tra i centri delle due bobine e la relazione tra a e d affinché B sia massimamente uniforme tra le due bobine.



Il campo prodotto da una spira circolare di raggio a a distanza x dal centro vale

$$B_y(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0$$

$$dB_x(x, 0, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I (\underline{dl} \times \underline{r}) \cdot \frac{1}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a d\theta}{x^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} d\theta$$

$$B_x(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Per le bobine di Helmholtz si ha:

$$B_y(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0$$

$$B_x(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 I N}{2} \left[\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{a^2}{(a^2 + (d-x)^2)^{3/2}} \right]$$

$B_x(x, 0, 0)$ è ^{estremale} ~~minimo~~ per $x = \frac{d}{2}$ infatti

$$\frac{d}{dx} B_x(x, 0, 0) = - \frac{3\mu_0 I N a^2}{2} \left[\frac{x}{(a^2 + x^2)^{5/2}} - \frac{d-x}{(a^2 + (d-x)^2)^{5/2}} \right]$$

$$\text{e } \left. \frac{d}{dx} B_x(x, 0, 0) \right|_{x=\frac{d}{2}} = 0$$

Intorno a $x = \frac{d}{2}$ il campo è minimamente uniforme se anche

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} B_x(x, 0, 0) \right|_{x=\frac{d}{2}} = 0$$

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} B_x(x, 0, 0) \right|_{x=\frac{d}{2}} = - \frac{3\mu_0 I N a^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{1}{[a^2 + (d-x)^2]^{5/2}} - \frac{5x^2}{(a^2 + x^2)^{7/2}} - \frac{5(d-x)^2}{(a^2 + (d-x)^2)^{7/2}} \right]_{x=\frac{d}{2}} =$$

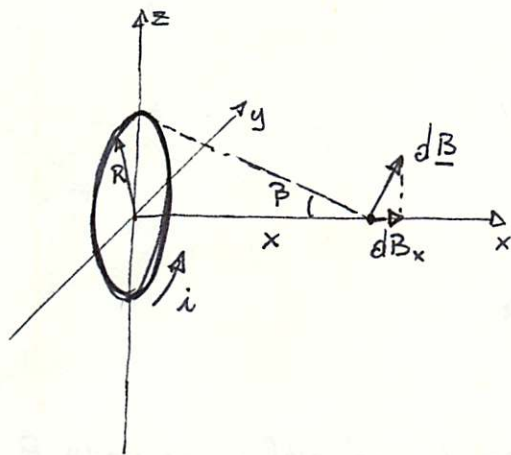
$$= - \frac{3\mu_0 I N a^2}{2} \left[\frac{2}{\left(a^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{5/2}} - \frac{10 \frac{d^2}{4}}{\left(a^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{7/2}} \right] =$$

$$= - \frac{3\mu_0 I N a^2}{2} \frac{a^2 + \frac{d^2}{4} - 5 \frac{d^2}{4}}{\left(a^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{7/2}} = - \frac{3\mu_0 I N a^2}{2} \frac{a^2 - d^2}{\left(a^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{7/2}} = 0$$

da da $a = d$

①

Induzione magnetica lungo l'asse di una spira circolare



$$r^2 = x^2 + R^2$$

$$dl = R d\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\sin \beta = \frac{R}{r}$$

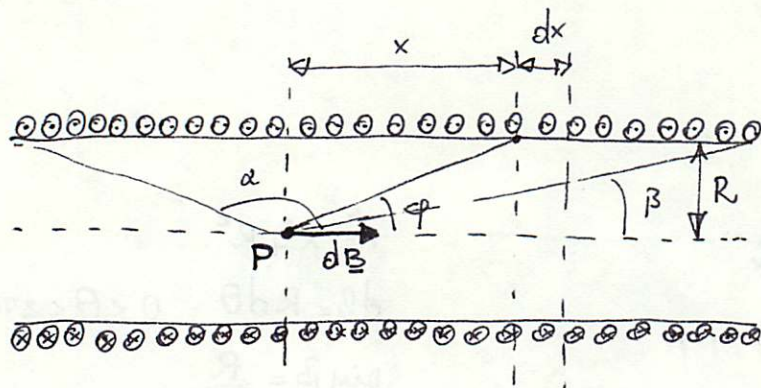
$$B_y(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0$$

$$dB_x(x, 0, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{r^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R^2 d\theta}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B_x(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Induzione magnetica al centro di un solenoide



Il solenoide abbia N spire e sia lungo L ed abbia raggio R

il campo B lungo l'asse è parallelo all'asse.

il contributo dovuto alle $\frac{N}{L} dx$ spire circolari comprese nel tratto dx distante x da P è:

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{N}{L} dx$$

$$R = x \tan \varphi$$

$$dx = -R \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$\sqrt{x^2 + R^2} = \frac{R}{\sin \varphi}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\sin^3 \varphi}{R^3} \frac{N}{L} \frac{-R d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{N}{L} \frac{\mu_0 i}{2} \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{N}{L} \frac{\mu_0 i}{2} d(\cos \varphi)$$

$$B = \frac{N}{L} \frac{\mu_0 i}{2} (\cos \beta - \cos \alpha)$$

quando $L \rightarrow \infty$ con $\frac{N}{L} = n = \text{costante}$

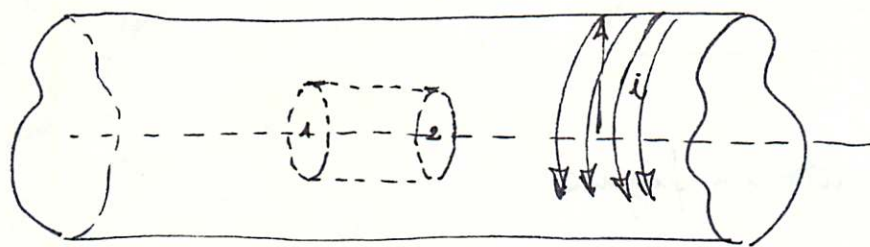
$$\beta \rightarrow 0 \quad \alpha \rightarrow \pi$$

$$\boxed{B = \mu_0 i n}$$

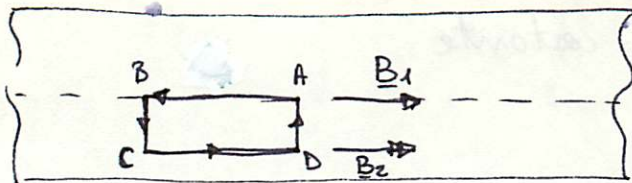
lo stesso risultato si ottiene facendo uso delle relazioni:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \oint (\underline{B}) = 0$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} \Rightarrow \oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 \sum i$$



- 1) si consideri il cilindro in figura; attraverso la sua superficie $\oint (\underline{B}) = 0$. Poiché il solenoide è infinito le facce 1 e 2 sono intercambiabili: il flusso che entra da 1 deve uscire da 2. Ne segue che il flusso attraverso il mantello è nullo, cioè $\underline{B}$ è parallelo all'asse del solenoide per la simmetria cilindrica che necessariamente deve possedere.

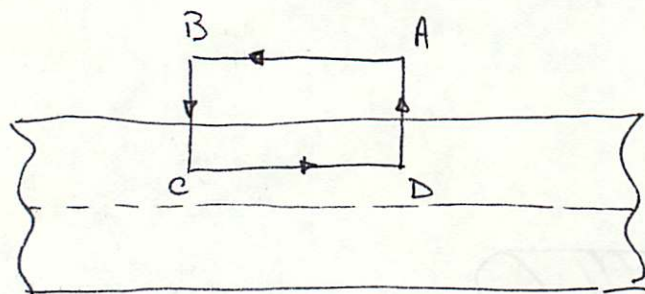


2) si consideri il circuito in figura:

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = 0 = -B_1 \overline{AB} + B_2 \overline{CD} \Rightarrow B_1 = B_2$$

$\underline{B}$ è uniforme all'interno del solenoide

onde fuori del solenoide $\underline{B}$ è uniforme ma dovendosi annullare all'infinito $\underline{B} = 0$

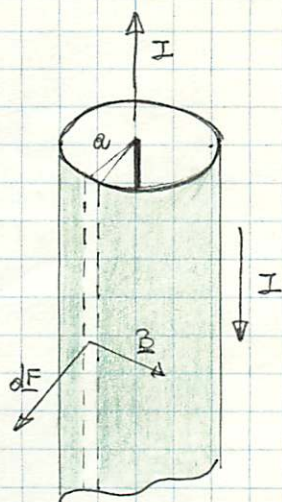


3) si consideri il circuito in figura:

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 i n \overline{AB} = B \overline{CD}$$

$B = \mu_0 i n$ essendo n il numero di spire per unità di lunghezza.

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore rettilineo di sezione trasversale circondato da un conduttore cilindrico di raggio $a = 5 \text{ mm}$ e spessore trasversale. Tra i due conduttori c'è il vuoto. Determinare la pressione a cui è sottoposto il conduttore cilindrico quando il cavo è percorso da corrente $I = 10 \text{ A}$.



Si consideri un tratto di cavo di lunghezza l . filo e cilindro sono percorsi dalla stessa corrente I in versi opposti. Lungo la striscia infinitesimale del cilindro con campo di larghezza $a d\theta$ fluisce la corrente

$$I \frac{a d\theta}{2\pi a} = \frac{I}{2\pi} d\theta$$

Poiché il campo B generato dal filo sul cilindro vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{tangente al cilindro}$$

la striscia subisce una forza repulsiva (repulsive)

$$dF = \frac{I}{2\pi} d\theta \cdot l \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi^2 a} d\theta$$

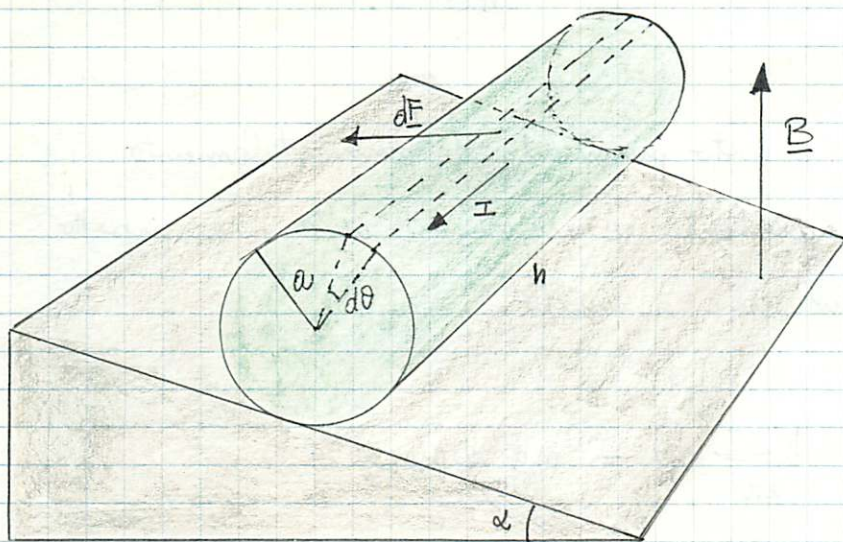
la forza totale che si esercita sul tratto di cilindro lungo l vale:

$$\bar{F} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a}$$

et la pression $\bar{p}$

$$p = \frac{F}{2\pi a l} = \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi a} \right)^2 = 0.13 \text{ Pa} = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ atm.}$$

Un cilindro omogeneo di massa $m = 100 \text{ g}$ raggio $a = 3 \text{ cm}$ ed altezza $h = 10 \text{ cm}$ scende a velocità costante lungo un piano inclinato con $\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$. Lungo la superficie laterale del cilindro scorre una corrente I ed esiste un campo verticale $B = 10^4 \text{ Gauss} (= 1 \text{ T})$. Si calcoli il valore di I nei casi a) l'angolo piano e cilindro non c'è attrito b) il cilindro rotola senza strisciare.



La corrente che scorre lungo la porzione della superficie laterale compresa tra θ e $\theta + d\theta$ vale

$$dI = I \cdot \frac{a d\theta}{2\pi a} = \frac{I}{2\pi} d\theta$$

essa dà luogo ad una forza dF

orizzontale

che si oppone alla discesa del cilindro (per un opportuno verso di I)

$$dF = h B dI = \frac{h B I}{2\pi} d\theta$$

a) se l'attrito è trascurabile e il cilindro trasla a velocità costante la somma delle forze lungo il piano è nulla:

$$\int dF \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0$$

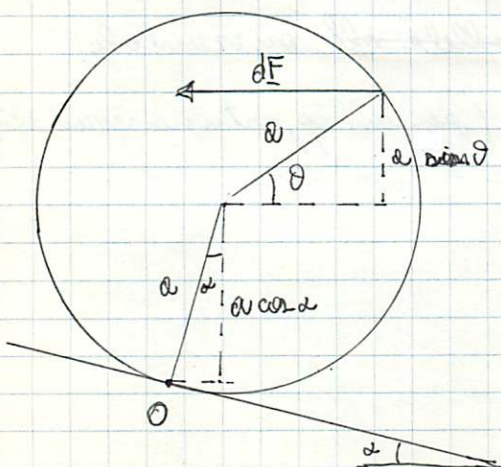
$$hBI \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0 \quad I = \frac{mg}{hB} \tan \alpha = 5.66 \text{ A}$$

b) in presenza di attrito e moto di puro rotolamento la velocità di discesa è costante se il momento delle forze rispetto all'asse di istantanea rotazione è nullo

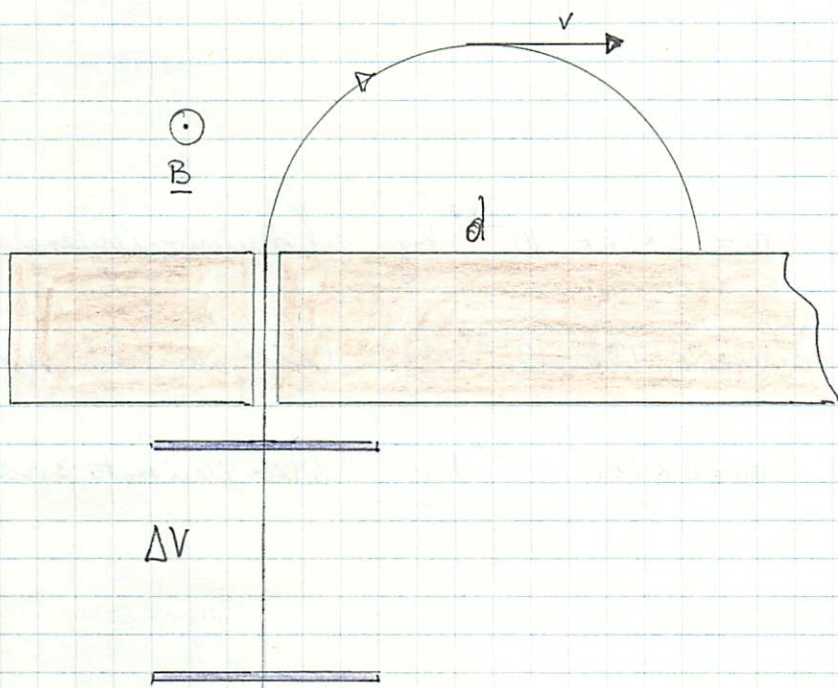
$$\int_0^{2\pi} (\omega \cos \alpha + \omega \sin \theta) \frac{hBI}{2\pi} d\theta - mg \omega \sin \alpha = 0$$

$$hBI \omega \cos \alpha - mg \omega \sin \alpha = 0$$

$$I = \frac{mg}{hB} \tan \alpha = 5.66 \text{ A} \quad \text{come nel caso a)}$$



Un fascio di ioni dopo essere stato accelerato da fermo da una d.d.p. $\Delta V = 10^4 \text{ V}$ e collimato penetra in una regione con campo $B = 0.1 \text{ T}$ uniforme perpendicolare al fascio. Il fascio viene deviato di 180° rispetto alla direzione iniziale ed urta su una lastra a distanza $d = 26.5 \text{ cm}$ dal punto di ingresso nella regione deflettente. Calcolare il rapporto q/m degli ioni.



gli ioni entrano nella regione deflettente con velocità v tale che:

$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V \quad v = \sqrt{2 \frac{q}{m} \Delta V}$$

tale velocità viene conservata in modulo fino all'ingresso nella regione

La traiettoria è circolare con raggio $\frac{d}{2} = \frac{m v}{q B}$

$$m \frac{v^2}{d/2} = q v B$$

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{B d/2} = \frac{1}{B d/2} \sqrt{2 \frac{q}{m} \Delta V}$$

quadrando

$$\frac{q}{m} = \frac{2 \Delta V}{B^2 d^2/4} = \frac{8 \Delta V}{B^2 d^2} = 4.8 \cdot 10^7 \text{ C Kg}^{-1}$$

gli ioni potrebbero essere:

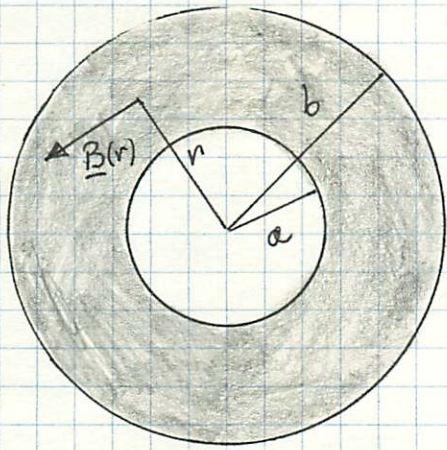
$$\text{H}^{2+} \quad q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m = 2 \times 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} \quad (\text{deuterio ionizzato})$$

$$\text{He}^{4++} \quad q = 2 \times 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m = 4 \times 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} \quad (\text{elio ionizzato 2 volte})$$

$$\text{Li}^{6+++} \quad q = 3 \times 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m = 6 \times 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} \quad (\text{litio ionizzato 3 volte})$$

⋮
⋮
⋮

Un conduttore a sezione tubolare con raggi $a = 10 \text{ cm}$ e $b = 20 \text{ cm}$ è percorso da una corrente I con densità uniforme. Determinare B in funzione della distanza del centro del conduttore e la distanza totale da $B(r) = B\left(\frac{a+b}{2}\right)$



Per motivi di simmetria $\underline{B}$ è tangente ai cerchi di raggio r concentrici al conduttore e con modulo $B = B(r)$

usando il teorema della circuitazione $\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \int_S \underline{j} \cdot \hat{n} dS \mu_0$

per $0 < r < a$ si ha:

$$2\pi r B(r) = 0 \quad B(r) = 0$$

per $a < r < b$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

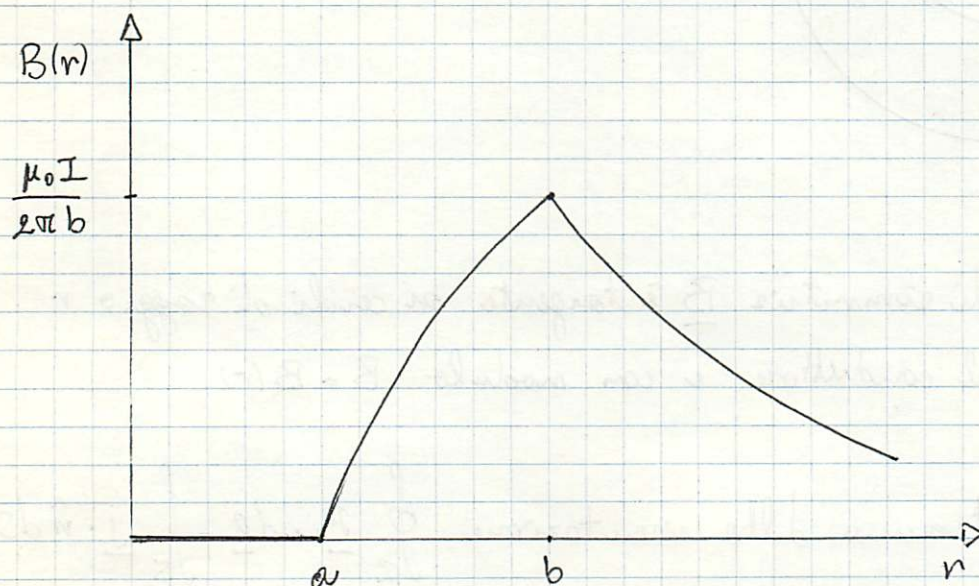
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\mu_0 \quad r > b$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

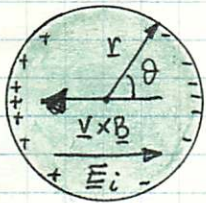
$$B(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & b < r \end{cases}$$



$$B(r_0) = B\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{a+b}{2}} \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

$$r_0 = \frac{a+b}{2} \frac{b^2 - a^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - a^2} = 36 \text{ cm}$$

Una sfera metallica di raggio $a = 1.2 \text{ cm}$ ^{e permeabilità relativa $\mu_r = 1$} si muove con velocità costante $v = 0.3 \text{ m s}^{-1}$ in un campo di induzione magnetica $B = 0.5 \text{ T}$ inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto a v .
Calcolare il campo elettrico all'interno e all'esterno della sfera rispetto ad un sistema di riferimento fisso, la densità di carica indotta nel volume e sulle superficie della sfera e il momento di dipolo della sfera.



Poiché $\mu_r = 1$ anche all'interno della sfera il campo di induzione magnetica è $\underline{B}$. All'interno della sfera si stabilisce un campo elettrico $\underline{E}_i$ uniforme che compensa le forze magnetiche su ogni carica libera:

$$q(\underline{E}_i + \underline{v} \times \underline{B}) = 0 \quad \underline{E}_i = - \underline{v} \times \underline{B} \quad E_i = 0.075 \text{ V m}^{-1}$$

poiché $\underline{\nabla} \cdot \underline{E}_i = 0$ all'interno della sfera la densità di carica è $\rho = 0$

la densità di carica sulla superficie della sfera σ fa sì che la sfera è equivalente ad un dipolo di momento $\underline{p}$ antiparallelo ad $\underline{E}_i$.

Il campo elettrico all'interno della sfera in un punto

individuato dal vettore $\underline{r}$ rispetto al centro della sfera $\hat{e}$

$$\underline{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\underline{P} \cdot \underline{r}) \underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{P}}{r^3} \right)$$

Detto θ l'angolo tra $\underline{r}$ e $\underline{P}$ (ovvero tra $\underline{r}$ ed $\underline{E}_i$) la scomposizione delle componenti parallela alla superficie della sfera dà:

$$E_{i||} = -E_i \sin\theta = E_{e||} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3} \sin\theta$$

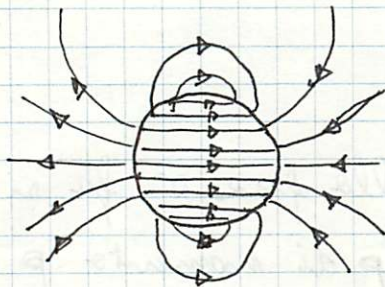
$$P = |\underline{P}| = 4\pi\epsilon_0 \omega^3 |\underline{E}_i| = 4\pi\epsilon_0 \omega^3 vB \sin\alpha = 1.4 \cdot 10^{-17} \text{ C m}$$

$$\underline{P} = 4\pi\epsilon_0 \omega^3 \underline{v} \times \underline{B}$$

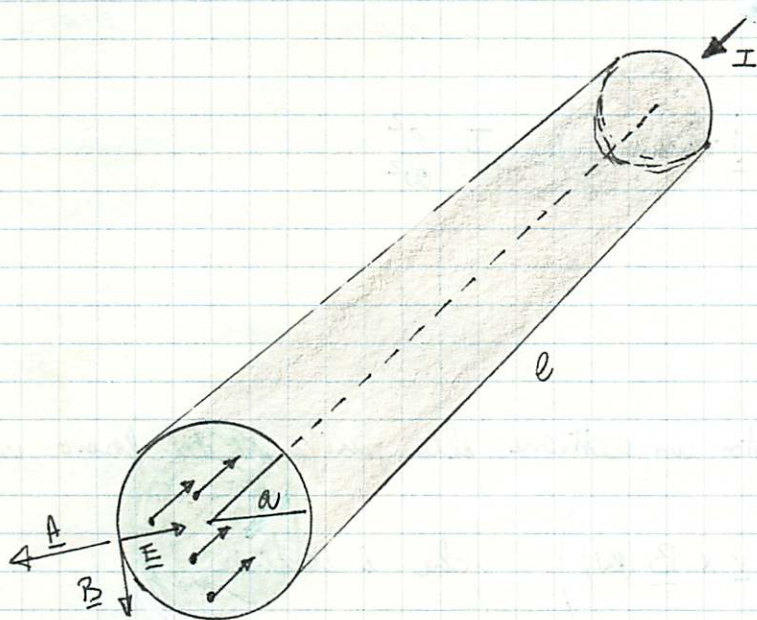
$$\underline{E}_e = \frac{3 \left[(\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \hat{r} \right] \hat{r} - \underline{v} \times \underline{B}}{r^3} \omega^3$$

la densità di carica sulla superficie della sfera è data dal teorema di Gauss:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \epsilon_0 (\underline{E}_e - \underline{E}_i) \cdot \hat{r} = \epsilon_0 \left[3 (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \hat{r} - (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \hat{r} + (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \hat{r} \right] = \\ &= 3 \epsilon_0 (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \hat{r} = -3 \epsilon_0 vB \sin\alpha \cos\theta \end{aligned}$$



Un fascio omogeneo di elettroni, precedentemente accelerati con una d.d.p. $\Delta V = 3 \text{ kV}$, ha intensità di corrente $I = 0.5 \text{ nA}$ e sezione circolare di raggio $a = 1.2 \text{ mm}$. Determinare la velocità degli elettroni v , la densità di carica spaziale del fascio ρ , i vettori $\underline{E}$ ed $\underline{B}$ all'interno del fascio, l'accelerazione a cui è sottoposto un elettrone alla periferia del fascio, l'energia elettromagnetica e cinetica per unità di lunghezza del fascio.



la velocità degli elettroni $\bar{v} = v = \sqrt{\frac{2e \Delta V}{m}} = 3.25 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$

si nota che $\beta = \frac{v}{c} = 0.108$ e quindi l'approssimazione non relativistica è accettabile.

la densità di carica ρ uniforme è legata alla densità di corrente j

$$j = -ne v = \rho v \quad \rho = \frac{j}{v} = \frac{-I}{\pi a^2 v} = -3.40 \cdot 10^{-12} \text{ C m}^{-3}$$

Il campo E è centro radiale; considerato un cilindro, coassiale al foro, di raggio r e lunghezza l si ha:

$$\phi(E) = - E 2\pi r l = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = - \frac{I}{\pi \omega^2 v \epsilon_0} l \pi \omega^2$$

$$E(r) = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r v}$$

Il campo B è tangenziale; considerato un cerchio, coassiale al foro, di raggio r si ha:

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 \int \underline{j} \cdot \hat{n} ds = \mu_0 I \frac{r^2}{\omega^2}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi \omega^2}$$

l'accelerazione a cui è sottoposto un elettrone alla periferia del foro vale:

$$\underline{A} = \frac{1}{m} \underline{F} = \frac{1}{m} \left(-e \underline{E}(\omega) - e \underline{v} \times \underline{B}(\omega) \right) \quad \text{che è radiale}$$

$$A = \frac{e}{m} E(\omega) - \frac{e}{m} v B(\omega) = \frac{e}{m} \frac{I}{2\pi \omega} \left(\frac{1}{\epsilon_0 v} - \mu_0 v \right) =$$

$$= -\frac{e}{m} \frac{I}{2\pi \omega} \mu_0 v \left(1 - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 v^2} \right) = -\frac{e}{m} \frac{I}{2\pi \omega} \mu_0 v \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right) = +2.00 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-2}$$

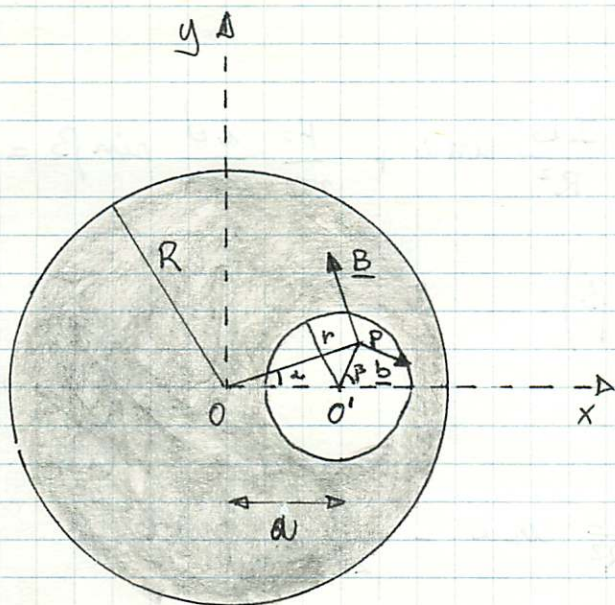
la densità di energia e.m. vale $W(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E(r)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B(r)^2 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 \omega^4} \left(\frac{c^2}{v^2} + 1 \right)$

l'energia e.m. per unità di lunghezza è: $\frac{dU}{dl} = \int_0^a W(r) 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{15\pi} \left(\frac{c^2}{v^2} + 1 \right) = 5.4 \cdot 10^{-25} \text{ J m}^{-1}$

la densità di energia cinetica vale $W' = \frac{1}{2} m v^2 \frac{\rho}{-e}$ costante

l'energia cinetica per unità di lunghezza è $\frac{dU}{dl} = W' \pi \omega^2 = \frac{I m v}{2e} = 4.6 \cdot 10^{-14} \text{ J m}^{-1}$

Un filo cilindrico indefinito di raggio R con una cavità cilindrica di raggio r e distanza a dall'asse è percorso da una densità di corrente $\underline{J}$ uniforme. Si calcoli $\underline{B}$ in un punto generico della cavità.



Detto $\hat{z}$ l'asse del filo si ha $\underline{J} = J \hat{z}$

La corrente totale che scorre nel filo è:

$$I_{\text{tot}} = J(\pi R^2 - \pi r^2) = I - i$$

dove $I = J \pi R^2$ è la corrente del filo senza cavità

$i = J \pi r^2$ è la corrente della cavità

Nel conduttore cilindrico con corrente I uniforme il campo a distanza D dall'asse vale:

$$B \cdot 2\pi D = \mu_0 I \frac{D^2}{R^2}$$

$$B(D) = \frac{\mu_0 I D}{2\pi R^2}$$

analogamente per la cavità

$$b(d) = \frac{\mu_0 i d}{2\pi r^2}$$

Potro $D = |OP|$ $d = |O'P|$

$\alpha = \widehat{POO'}$ $\beta = -\widehat{PO'O} + \pi$

Nel punto P si ha: $B_z(P) = 0$

$$B_x(P) = B_x(D) + b_x(d) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{ID}{R^2} \sin \alpha + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{id}{r^2} \sin \beta =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \left(-D \sin \alpha + d \sin \beta \right)$$

$$B_y(P) = B_y(D) + b_y(d) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{ID}{R^2} \cos \alpha - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{id}{r^2} \cos \beta =$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 I \left(D \cos \alpha - d \sin \beta \right)$$

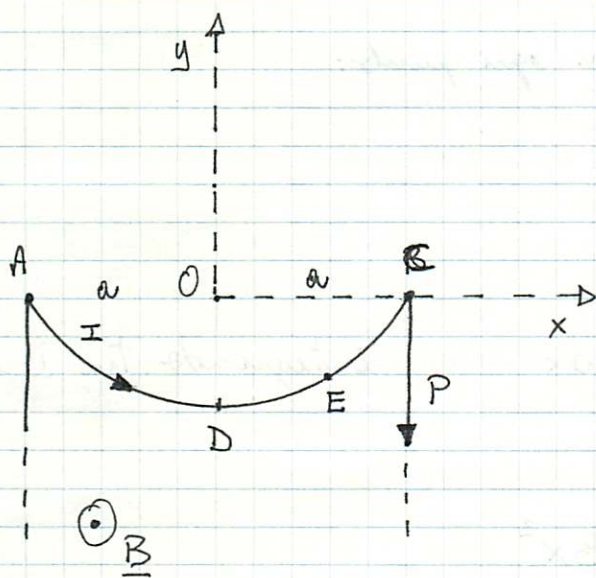
D ed d possono essere espressi in termini di d e β tramite

le relazioni:

$$D = \sqrt{a^2 + d^2 + 2ad \cos \beta}$$

$$\frac{D}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \alpha}$$

Un filo conduttore flessibile inestensibile e di massa trascurabile ^① è tenuto teso tra i punti A e C distanti $2a$ mediante una forza peso P applicata in C. Il filo è percorso da corrente I ed è immerso in un campo di induzione magnetica B uniforme parallelo al suolo. Determinare la configurazione di equilibrio del filo.



Vogliamo determinare la traiettoria del filo $y(x)$ tra i punti A e C

Per motivi di simmetria deve essere $y(-x) = y(x)$ con $y(x) < 0$ per B ed I orientati come in figura.

Su un tratto infinitesimo di filo intorno al punto di coordinate x e y la forza magnetica vale:

$$d\vec{F} = I d\vec{el} \times \vec{B} = I \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \hat{i} IB dy - \hat{j} IB dx$$

In ogni punto del filo la tensione vale $T = P$ ed ha orientazione variabile

l'equilibrio del punto di filo DE dove $D \equiv (0, -h)$ $E \equiv (x, y)$
da:

$$\begin{cases} \tau_x + \int_D^E dF_x - P = 0 \\ \tau_y + \int_D^E dF_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_x + IB(y+h) - P = 0 \\ \tau_y - IBx = 0 \end{cases}$$

essendo in D $\underline{T} = -\hat{i}\tau = -\hat{i}P$

Poiché $\underline{T}$ è tangente al filo in ogni punto:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\tau_y}{\tau_x} = \frac{IBx}{P - IB(y+h)}$$

$$[P - IB(y+h)] dy = IBx dx \quad \text{integrando tra D ed E}$$

$$P(y+h) - \frac{1}{2} IB (y+h)^2 = \frac{1}{2} IB x^2$$

$$x^2 + (y+h)^2 - 2(y+h) \frac{P}{IB} + \left(\frac{P}{IB}\right)^2 - \left(\frac{P}{IB}\right)^2 = 0$$

$$x^2 + \left(y+h - \frac{P}{IB}\right)^2 = \left(\frac{P}{IB}\right)^2$$

che è l'equazione di una circonferenza di raggio $\frac{P}{IB}$ e centro in $(0, \frac{P}{IB} - h)$

Nei punti A e C $(\pm a, 0)$ l'equazione della traiettoria permette di determinare h:

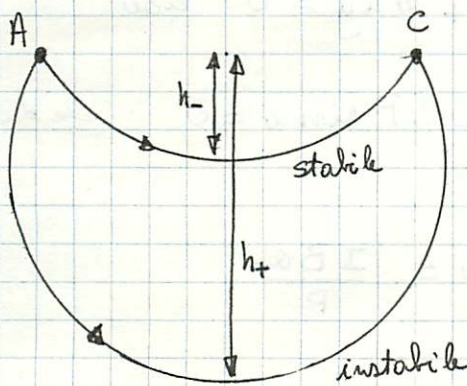
$$a^2 + \left(h - \frac{P}{IB}\right)^2 = \left(\frac{P}{IB}\right)^2$$

$$h = \pm \sqrt{\left(\frac{P}{IB}\right)^2 - \omega^2} + \frac{P}{IB}$$

de două soluții reale se $\frac{P}{IB} \geq \omega$ adică $P \geq IB\omega$

și prin urmare de $h = \frac{P}{IB} - \sqrt{\left(\frac{P}{IB}\right)^2 - \omega^2}$ corespunde ad un echilibru stabil

$h = \frac{P}{IB} + \sqrt{\left(\frac{P}{IB}\right)^2 - \omega^2}$ echilibru instabil.



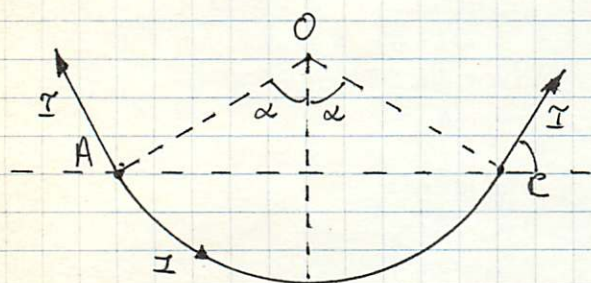
2° metodo la traiettoria del filo deve essere un arco di circonferenza perché questo è la traiettoria di una carica in campo B uniforme.

La forza magnetica totale agente sul tratto AC vale:

$$F_x = \int_0^0 IB dy = 0 \quad F_y = \int_{-a}^a -IB dx = -2IBa$$

F_y è equilibrata dalle tensioni, di modulo P , in A e C.

Detto 2α l'ampiezza angolare dell'arco di circonferenza AC si ha:



$$F_y + 2T_y = 0 \quad \text{cioè}$$

$$F_y + 2P \sin \alpha = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\sin \alpha = \frac{IBa}{P}$$

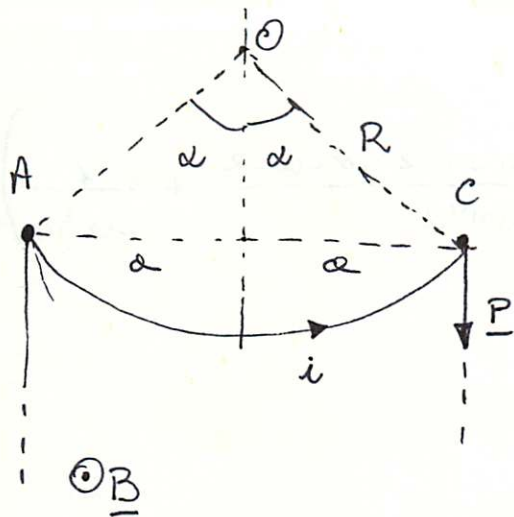
che ha soluzioni

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{IBa}{P} \right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \pi - \arcsin \left(\frac{IBa}{P} \right) > \frac{\pi}{2}$$

solo se $P \geq IBa$

(3)

3° metodo

quando il filo forma un arco di cerchio di raggio R ed apertura 2α con $a = R \sin \alpha$

l'energia del circuito nel campo $\underline{B}$ vale

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m &= -\underline{m} \cdot \underline{B} = i S B = i B \left[S_0 - \text{area} \right] = \\ &= i B \left[S_0 - \left(\alpha R^2 - a \frac{a}{\tan \alpha} \right) \right] = \\ &= i B \left[S_0 - a^2 \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\tan \alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

in questa stessa configurazione l'energia gravitazionale vale

$$\mathcal{U}_g = P \ell = P (2\alpha R - 2a) = 2Pa \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right)$$

avendo posto $\mathcal{U}_g = 0$ per $\alpha = 0$

L'energia totale è $\mathcal{U}_m(\alpha) + \mathcal{U}_g(\alpha)$

all'equilibrio $\frac{d}{d\alpha} (\mathcal{U}_m + \mathcal{U}_g) = 0$

$$\frac{d}{d\alpha} (\mathcal{U}_m + \mathcal{U}_g) = -iB\omega^2 \left(\frac{\sin^2\alpha - 2z\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} \right) +$$

$$+ 2Pa \frac{\sin\alpha - z\cos\alpha}{\sin^2\alpha} =$$

$$= -2iB\omega^2 \frac{\sin\alpha - z\cos\alpha}{\sin^3\alpha} + 2Pa \sin\alpha \frac{\sin\alpha - z\cos\alpha}{\sin^3\alpha} = 0$$

$$2Pa \sin\alpha = 2iB\omega^2$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{iB\omega}{P}}$$

si hanno due soluzioni se $iB\omega < P$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \arcsin\left(\frac{iB\omega}{P}\right) < \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \pi - \arcsin\left(\frac{iB\omega}{P}\right) \end{array} \right.$$

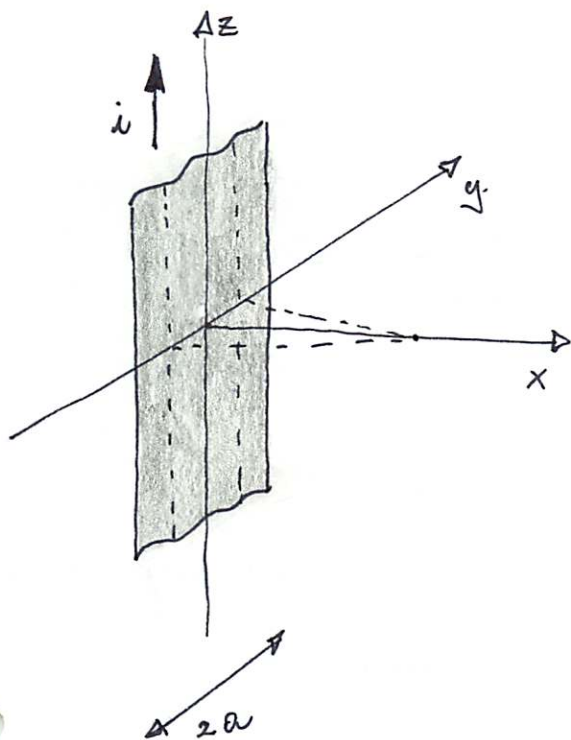
equilibrio stabile $\frac{d^2\mathcal{U}}{d\alpha^2} > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \pi - \arcsin\left(\frac{iB\omega}{P}\right) \\ \alpha = \arcsin\left(\frac{iB\omega}{P}\right) \end{array} \right. = \text{instabile } \frac{d^2\mathcal{U}}{d\alpha^2} < 0$$

nessuna se $iB\omega > P$

un'unica soluzione ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) se $iB\omega = P$

(1)



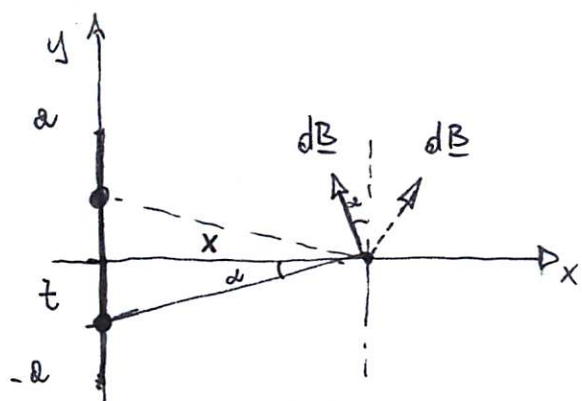
Un nastro conduttore di lunghezza infinita e larghezza $2a$ è percorso da una corrente continua i . Determinare l'induzione magnetica $\underline{B}$ nei punti dell'asse x e dell'asse y .

In ogni punto dell'asse x $(x, 0, 0)$ $\underline{B}$ ha componenti

$$B_x(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0 \quad B_y(x, 0, 0) \neq 0$$

usando la formula di Biot-Savart: $\left(B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right)$

$$dB_y(x, 0, 0) = 2 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{x/\cos\alpha} \left(\frac{i}{2a} \frac{x}{\cos^2\alpha} d\alpha \right) \cos\alpha$$



$$\begin{aligned} di &= \frac{i}{2a} dz = \frac{i}{2a} d(\tan\alpha \cdot x) \\ &= \frac{i}{2a} \frac{x}{\cos^2\alpha} d\alpha \end{aligned}$$

$$dB_y(x, 0, 0) = \frac{\mu_0}{\pi} \frac{i}{2a} d\alpha$$

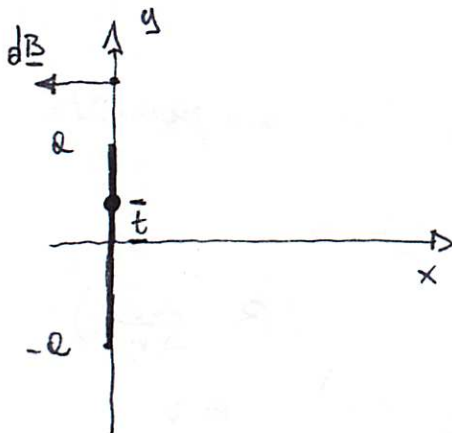
$$B_y(x, 0, 0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{\mu_0 i}{2\pi a} d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \alpha_0$$

$$\tan \alpha_0 = \frac{a}{x}$$

$$B_y(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \arctan\left(\frac{a}{x}\right)$$

In ogni punto dell'asse y $(0, y, 0)$ $\underline{B}$ ha componenti

$$B_y(0, y, 0) = B_z(0, y, 0) = 0 \quad B_x(0, y, 0) \neq 0$$



$$dB_x(0, y, 0) = - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{y-t} \frac{i}{2a} dt$$

$$B_x(0, y, 0) = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \frac{dt}{t-y} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\ln(t-y) \right]_{-a}^a = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \ln\left(\frac{a-y}{-a-y}\right)$$

$$B_x(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \ln\left(\frac{y-a}{y+a}\right)$$

equivalentemente si può usare la formula

$$\underline{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J}(x', y', z') \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x'$$

$$\underline{J}(x, y, z) = \hat{z} \frac{i}{2a} \delta(x) \cdot \begin{cases} 1 & |y| < a \\ 0 & |y| > a \end{cases}$$

lungo l'asse x cioè per $\underline{x} = (x, 0, 0)$ si ha

$$\hat{z} \times (\underline{x} - \underline{x}') = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ x-x' & -y' & -z' \end{vmatrix} = \hat{x} y' + \hat{y} (x-x')$$

quindi $B_z(x, 0, 0) = 0$

$$\begin{aligned} B_x(x, 0, 0) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi a \cdot 2} \int_{-a}^a dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\delta(x') y'}{[(x-x')^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i}{8\pi a} \int_{-a}^a dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{y'}{(y'^2 + z'^2)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

- $B_y(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 i}{8\pi a} \int_{-a}^a dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{x}{(x^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} =$

si noti che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(A^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{A^3} \int_0^{\infty} dz \left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + z^2}} \right]^3 =$$

$$= \frac{2}{A^3} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 \beta \frac{-A d\beta}{\sin^2 \beta} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + z^2}} = \sin \beta$$

$$- \frac{A z dz}{(A^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{A} \sin^2 \beta \cos \beta d\beta = \cos \beta d\beta$$

$$= \frac{2}{A^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \beta d\beta = \frac{2}{A^2} [-\cos \beta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{A^2}$$

$$B_y(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 i x}{8\pi a} \cdot \int_{-a}^a dy' \frac{2}{x^2 + y'^2} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_{-\frac{a}{x}}^{\frac{a}{x}} dt \frac{1}{1+t^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \arctan\left(\frac{a}{x}\right)$$

- $B_z(x, 0, 0) = 0$

lungo l'asse y cioè per $\underline{x} \equiv (0, y, 0)$ si ha:

$$\hat{\underline{z}} \times (\underline{x} - \underline{x}') = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ -x' & y-y' & -z' \end{vmatrix} = \hat{x} (y'-y) - \hat{z} x'$$

$$\bullet B_x(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{8\pi a} \int_{-a}^a dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{y'-y}{[(y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{8\pi a} \int_{-a}^a dy' (y'-y) \cdot \frac{2}{(y-y')^2} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \cdot \int_{-a}^a dy' \frac{1}{y'-y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \ln \left(\frac{a-y}{-a-y} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \ln \left(\frac{y-a}{y+a} \right)$$

$$\bullet B_y(0, y, 0) = 0$$

$$\bullet B_z(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{8\pi a} \int_{-a}^a dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{-S(x') x'}{[x'^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} = 0$$

Il potenziale vettore $\vec{e}$:

$$\underline{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(x')}{|x - x'|} d^3x'$$

nei punti dell'asse x

$$A_x(x, 0, 0) = A_y(x, 0, 0) = \text{costante} = 0$$

$$A_z(x, 0, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{2a} \int_{-a}^a dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{x^2 + y'^2 + z'^2}} + \text{costante} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{2a} \int_{-a}^a dy' \left[\ln(z' + \sqrt{x^2 + y'^2 + z'^2}) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \text{costante} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{2a} \int_{-a}^a dy' \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + (x^2 + y'^2)/L^2}}{-1 + \sqrt{1 + (x^2 + y'^2)/L^2}} \right) + \text{costante} =$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{i}{a} \int_{-a}^a dy' \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2}{\frac{1}{2}(x^2 + y'^2)/L^2} \right) + \text{costante} =$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{i}{a} \int_{-a}^a dy' \lim_{L \rightarrow \infty} \ln 4L^2 - \ln(x^2 + y'^2) + \text{costante} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{8\pi} \frac{i}{a} \int_{-a}^a dy' \ln(x^2 + y'^2) =$$

(4)

$$= -\frac{\mu_0 i}{8\pi a} \left[y' \ln(x^2 + y'^2) - 2y' + 2x \arctan\left(\frac{y'}{x}\right) \right]_{-a}^a =$$

$$= -\frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[a \ln(x^2 + a^2) - 2a + 2x \arctan\left(\frac{a}{x}\right) \right]$$

$$B_y(x, 0, 0) = \left[\nabla \times \underline{A}(x, 0, 0) \right]_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z(x, 0, 0) \end{vmatrix} \cdot \hat{j}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} A_z(x, 0, 0) =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[a \frac{2x}{a^2 + x^2} + 2 \arctan\left(\frac{a}{x}\right) + 2x \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} \left(-\frac{a}{x^2}\right) \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \arctan\left(\frac{a}{x}\right)$$

Nei punti dell'asse y

$$A_x(0, y, 0) = A_y(0, y, 0) = 0$$

$$A_z(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \int_{-a}^a dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{(y-y')^2 + z'^2}} + \text{costante} =$$

$$= - \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \int_{-a}^a dy' \ln[(y-y')^2] =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_{y-a}^{y+a} \frac{dt}{t} \ln t = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \left[t \ln t - t \right]_{y-a}^{y+a}$$

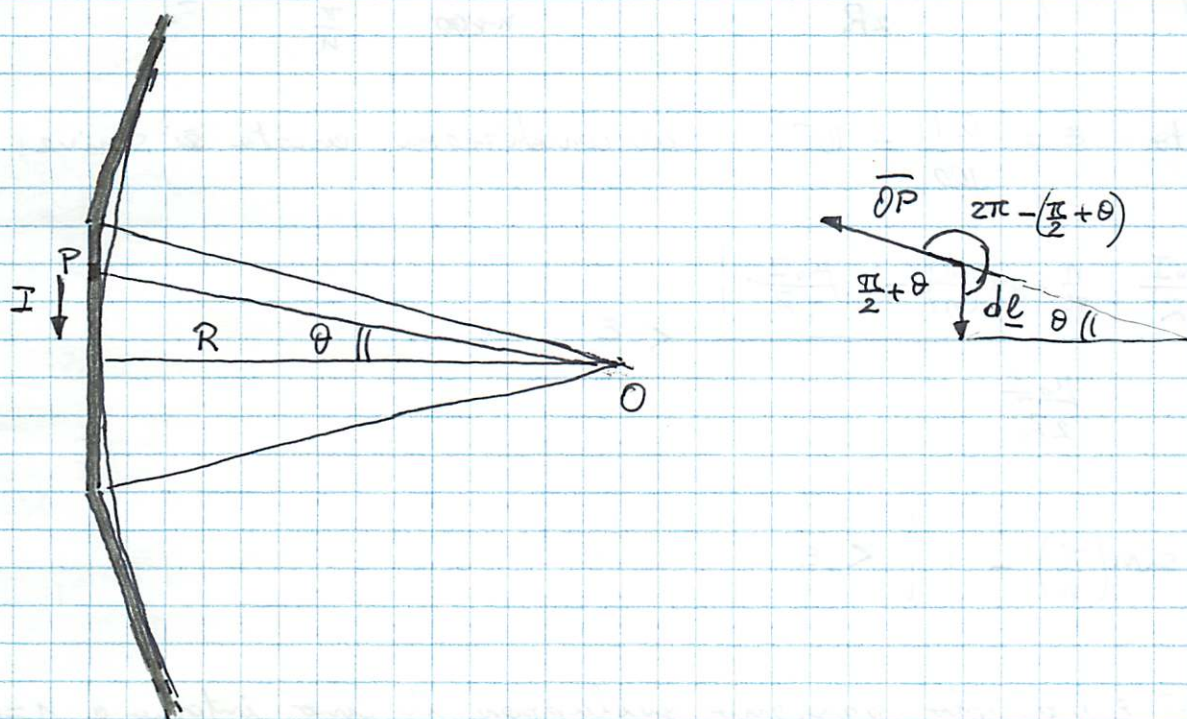
$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[y \ln \left(\frac{y-a}{y+a} \right) - a \ln(y^2 - a^2) + 2a \right]$$

$$B_x(0, y, 0) = \left[\nabla \times \underline{A}(0, y, 0) \right]_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z(0, y, 0) =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\ln \left(\frac{y-a}{y+a} \right) + y \frac{y+a}{y-a} \frac{y+a - y+a}{(y+a)^2} - a \frac{2y}{y^2 - a^2} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \ln \left(\frac{y-a}{y+a} \right)$$

Si trovi l'espressione dell'induzione magnetica $\underline{B}$ al centro di una spira, a forma di poligono regolare di $n \geq 3$ lati circoscritto attorno ad un cerchio di raggio R , percorsa da una corrente I . Si determini il valore minimo di n per cui il campo trovato differisce da quello di una spira circolare di raggio R per meno dello 0.1%.



In un poligono di n lati ogni lato è sotteso da un angolo $\frac{2\pi}{n}$. Si consideri l'elemento infinitesimo di lato, P , avente lunghezza $d\vec{l} = d(R \tan \theta) = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta$ e orientato nel verso della corrente

Dalla prima formula di Laplace il contributo infinitesimo all'induzione magnetica in O dato da questo elemento vale:

$$d\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{OP}}{|\vec{OP}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta \left(\frac{\cos \theta}{R} \right)^2 \sin \left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] \hat{n}$$

essendo $\hat{n}$ il vettore ortogonale al piano dove giace il poligono nel verso determinato dalla corrente

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos\theta d\theta$$

L'induzione magnetica totale vale $\underline{B} = B \hat{n}$ con

$$B = n \int_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos\theta d\theta = n \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin\theta \Big|_{-\pi/n}^{\pi/n} = n \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

per $n \rightarrow \infty$ si riassume il il campo di una spira circolare di raggio R , $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, usando $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = 1$

Posto $\varepsilon = \frac{0.1}{100} = 10^{-3}$ la condizione cercata si scrive

$$\frac{\left| \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{n \sin(\frac{\pi}{n})}{\pi} - \frac{\mu_0 I}{2R} \right|}{\frac{\mu_0 I}{2R}} < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \right| < \varepsilon$$

Poiché ε è piccolo possiamo sviluppare il seno intorno a $n = \infty$

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} - \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \dots \right) - 1 \right| &= \left| \left(1 - \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \dots \right) - 1 \right| = \\ &= \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 + O\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^4\right) < \varepsilon \end{aligned}$$

Il minimo valore di n richiesto è

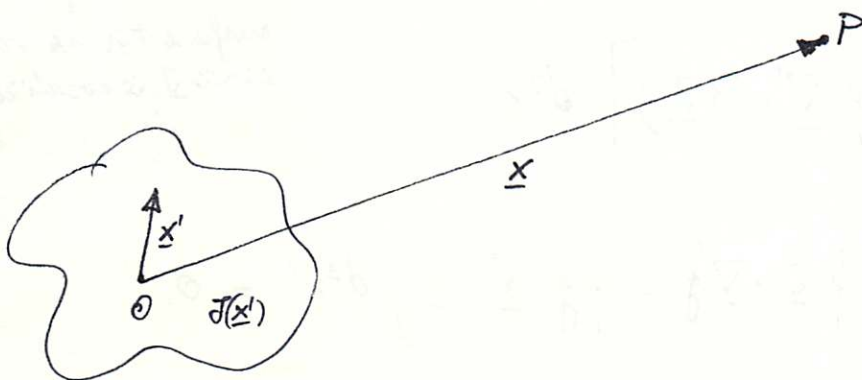
$$n = \left\lfloor \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor 99.346 \right\rfloor + 1 = 100$$

Magnetic field of a localized current distribution:

Magnetic Moment

(1)

Let us consider a general current distribution which is localized in a space region small with respect to the scale of length of interest.



$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underline{J}(\underline{x}') \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'$$

when $|\underline{x}| \gg |\underline{x}'|$

$$\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = \frac{1}{|\underline{x}|} + \frac{\underline{x} \cdot \underline{x}'}{|\underline{x}|^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{(\underline{x}^2 + \underline{x}'^2 - 2\underline{x} \cdot \underline{x}')^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\underline{x}'^2}{x^2} - 2 \frac{\underline{x} \cdot \underline{x}'}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\underline{x}'^2}{x^2} + \frac{\underline{x} \cdot \underline{x}'}{x^2} + \dots \right) = \frac{1}{x} \left[1 + \frac{\underline{x} \cdot \underline{x}'}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$A_i(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x}|} \int J_i(\underline{x}') d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{|\underline{x}|^3} \cdot \int J_i(\underline{x}') x' d^3x' + \dots$$

because $\underline{J}(\underline{x})$ is localized and divergenceless (steady state)

$$\begin{aligned} \int \left(f \underline{J}(\underline{x}') \cdot \underline{\nabla}' g + g \underline{J}(\underline{x}') \cdot \underline{\nabla}' f \right) d^3x' &= \text{integrating by parts} \\ &\text{and observing that the} \\ &\text{surface terms vanish} \\ &\text{since } \underline{J} \text{ is localized} \\ &= \int \left[f \underline{J} \cdot \underline{\nabla}' g - f \underline{\nabla}' \cdot (g \underline{J}) \right] d^3x' = \\ &= \int \left(f \underline{J} \cdot \underline{\nabla}' g - f \underline{J} \cdot \underline{\nabla}' g - f g \underline{\nabla}' \cdot \underline{J} \right) d^3x' = 0 \end{aligned}$$

with $f(\underline{x})$ and $g(\underline{x})$ arbitrary well-behaved functions.

$$\text{With } f=1 \text{ and } g=x_i \Rightarrow \int J_i(\underline{x}') d^3x' = 0 \quad \text{absence of monopole term!}$$

$$\text{with } f=x'_i \text{ and } g=x'_j \Rightarrow \int (x'_i J_j + x'_j J_i) d^3x' = 0$$

then

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \int \underline{x}' J_i d^3x' &= \sum_j x_j \int x'_j J_i d^3x' = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j x_j \int x'_j J_i d^3x' + \frac{1}{2} \sum_j x_j \int (-x'_i J_j) d^3x' = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j x_j \int (x'_i J_j - x'_j J_i) d^3x' = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \int (\underline{x}' \times \underline{J})_k d^3x' =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\underline{x} \times \int (\underline{x}' \times \underline{J}) d^3x' \right]_i$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} (\underline{x}' \times \underline{J})_k &= \\ &= \epsilon_{ijk} x'_l J_m \epsilon_{lmk} = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x'_l J_m = \\ &= x'_i J_j - x'_j J_i \end{aligned}$$

$$\underline{x} \cdot \int \underline{x}' J_i d^3x' = \underline{m} \times \underline{x}$$

Defining the magnetic moment of the current distribution as

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{x}' \times \underline{J}(\underline{x}') d^3x'$$

the vector potential as:

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{x}}{|\underline{x}|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\underline{x}|^3}\right)$$

$$\underline{B}(\underline{x}) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\nabla} \times \left(\underline{m} \times \frac{\underline{x}}{x^3} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underline{m} \left(\underline{\nabla} \cdot \frac{\underline{x}}{x^3} \right) - \frac{\underline{x}}{x^3} (\underline{\nabla} \cdot \underline{m}) + \left(\frac{\underline{x}}{x^3} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{m} - (\underline{m} \cdot \underline{\nabla}) \frac{\underline{x}}{x^3} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underline{m} \left(\frac{1}{x^3} \underline{\nabla} \cdot \underline{x} + \underline{x} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{x^3} \right) - \sum_i \hat{x}_i \underline{m} \cdot \underline{\nabla} \frac{x_i}{x^3} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underline{m} \left(\frac{1}{x^3} 3 + \underline{x} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{x^3} \right) - \sum_i \hat{x}_i \underline{m} \cdot \left[\frac{1}{x^3} \underline{\nabla} x_i + x_i \underline{\nabla} \frac{1}{x^3} \right] \right] =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \hat{x}_i \underline{m} \cdot \left[\frac{1}{x^3} \hat{x}_i + x_i \frac{-3\hat{x}}{x^4} \right]$$

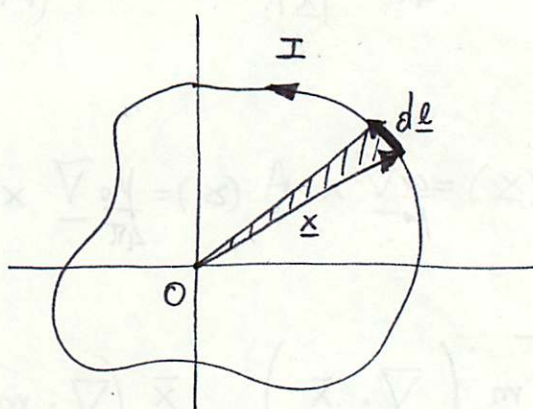
$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{x}(\hat{x} \cdot \underline{m}) - \underline{m}}{|\underline{x}|^3}$$

this is the field of a dipole!

- If the current is confined to a plane, but otherwise arbitrary, loop:

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{x} \times \underline{J}(\underline{x}) d^3x = I \frac{1}{2} \int \underline{x} \times d\underline{\ell}$$

$$|\underline{m}| = I \int dS = IS$$



$$\underline{m} = IS \hat{n}$$

$$dS = |\underline{x} \times d\underline{\ell}| \cdot \frac{1}{2}$$

where $\hat{n}$ is the vector normal the loop plane (right-hand rule)

$$\underline{B}(x) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\nabla} \times \left(\underline{m} \times \frac{x}{x^3} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_i \left(\underline{m} \times \frac{x}{x^3} \right)_j \hat{e}_k$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_i \left(\varepsilon_{pqr} m_p \frac{x_q}{x^3} \hat{e}_n \right) \cdot \hat{e}_j \hat{e}_k$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_i \left(\varepsilon_{pqj} m_p x_q x^{-3} \right) \hat{e}_k$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqj} m_p \hat{e}_k \left(\delta_{iq} x^{-3} - 3x^{-4} \frac{x_i}{x} x_q \right)$$

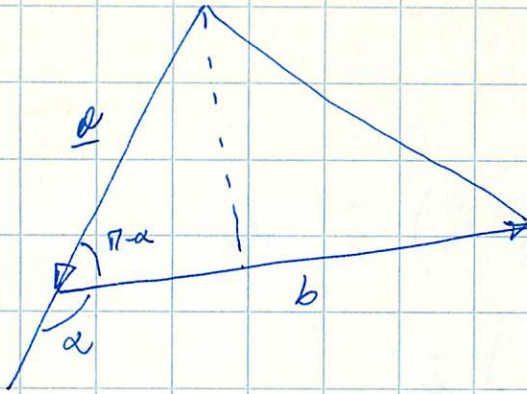
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jpq} \left\{ m_p \hat{e}_k \left(+ \delta_{iq} \frac{1}{x^3} - \frac{3x_i x_q}{x^5} \right) \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\delta_{kp} \delta_{iq} - \delta_{kq} \delta_{ip} \right) m_p \hat{e}_k \left(+ \delta_{iq} \frac{1}{x^3} - \frac{3x_i x_q}{x^5} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[m_k \hat{e}_k \left(+ \frac{1}{x^3} \delta_{ii} - \frac{3x_i x_i}{x^5} \right) - m_i \hat{e}_k \left(+ \delta_{ik} \frac{1}{x^3} - \frac{3x_i x_k}{x^5} \right) \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underline{m} \left(+ \frac{3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^5} \right) - \frac{\underline{m}}{x^3} + \frac{3(\underline{m} \cdot \underline{x}) \underline{x}}{x^5} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\underline{m} \cdot \hat{x}) \hat{x} - \underline{m}}{x^3}$$



$$\text{area} = \frac{1}{2} a \sin(\pi - \alpha) \cdot b = \frac{1}{2} a b \sin \alpha = \frac{1}{2} |\underline{a} \times \underline{b}|$$

- If the current distribution is provided by charged particles with charges q_i moving with velocities $\underline{v}_i$

$$\underline{J}(\underline{x}) = \sum_i q_i \underline{v}_i \delta(\underline{x} - \underline{x}_i)$$

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{x} \times \sum_i q_i \underline{v}_i \delta(\underline{x} - \underline{x}_i) d^3x =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i \underline{x}_i \times \underline{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i}{M_i} \underline{x}_i \times (M_i \underline{v}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i}{M_i} \underline{L}_i$$

where $\underline{L}_i$ is the orbital angular momentum of the i -th particle and M_i its mass.

In the case of a single particle or when $\frac{q_i}{M_i} = \frac{q}{M} \quad \forall i$

$$\underline{m} = \frac{q}{2M} \underline{L}$$

where $\underline{L}$ is the total orbital angular momentum.

Force and Torque on and Energy of a Localized Current Distribution in an External Magnetic Induction

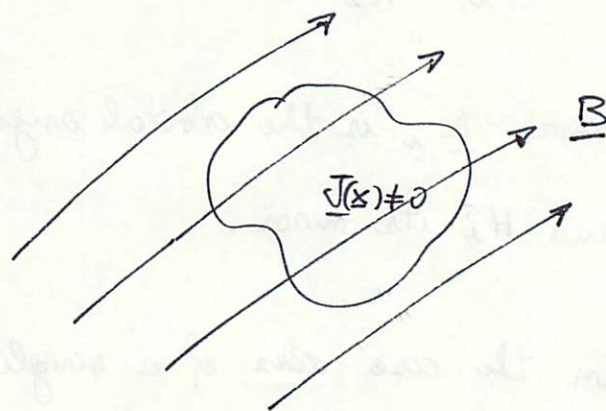
A current distribution in an external field $\underline{B}(\underline{x})$ experiences a force and a torque according to:

$$\underline{F} = \int \underline{J}(\underline{x}) \times \underline{B}(\underline{x}) d^3x$$

second Laplace's formula
 $d\underline{F} = i d\underline{\ell} \times \underline{B} = \underline{J} \times \underline{B} d^3x$

$$\underline{M} = \int \underline{x} \times (\underline{J}(\underline{x}) \times \underline{B}(\underline{x})) d^3x$$

If the magnetic induction varies slowly in the region where $\underline{J}$ is confined



$$B_k(\underline{x}) = B_k(0) + \underline{x} \cdot \underline{\nabla} B_k(0) + \dots$$

then

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \int J_j(\underline{x}) B_k(\underline{x}) d^3x = \\ &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left[\int J_j(\underline{x}) B_k(0) d^3x + \int J_j(\underline{x}) \underline{x} \cdot \underline{\nabla} B_k(0) d^3x + \dots \right] \end{aligned}$$

the first integral vanishes for steady-state currents

④

the second integral gives:

$$\underline{\nabla} B_u(0) \cdot \int \underline{x} J_j(\underline{x}) d^3x = \left[\underline{m} \times \underline{\nabla} B_u(0) \right]_j \quad \left(\begin{array}{l} \text{see p. 2 with} \\ \underline{x} \rightarrow \underline{\nabla} B_u(0) \end{array} \right)$$

$$= \left(\underline{m} \times \underline{\nabla} \right)_j B_u(\underline{x}) \Big|_{\underline{x}=0}$$

$$F_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{j pq} m_p \partial_q B_u(0) = (\delta_{kp} \delta_{iq} - \delta_{kq} \delta_{ip}) m_p \partial_q B_u(0) =$$

$$= m_k \partial_i B_u(0) - m_i \partial_k B_u(0) = \partial_i \underline{m} \cdot \underline{B}(0)$$

$$\underline{F} = - \underline{\nabla} \left(- \underline{m} \cdot \underline{B} \right) \Big|_{\underline{x}=0}$$

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j m_j B_j(0) = \sum_j m_j \frac{\partial B_j(0)}{\partial x_i}$$

$$\text{if } \underline{B} \text{ is constant} \Rightarrow \underline{F} = 0$$

The torque is:

$$\underline{M} = \int \underline{x} \times (\underline{J}(\underline{x}) \times \underline{B}(0)) d^3x + \int \underline{x} \times (\underline{J}(\underline{x}) \times \underline{x} \cdot \underline{\nabla} \underline{B}(0)) d^3x + \dots =$$

using $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$

the zeroth-order terms gives:

$$\underline{M} = \int \left[(\underline{x} \cdot \underline{B}(0)) \underline{J}(\underline{x}) - (\underline{x} \cdot \underline{J}(\underline{x})) \underline{B}(0) \right] d^3x$$

" (use $f=g=|\underline{x}|$)

$$M_i = \underline{B}(0) \cdot \int \underline{x} J_i(\underline{x}) d^3x = \quad (\text{see p.2 with } \underline{x} \rightarrow \underline{B}(0))$$

$$= \left[\underline{m} \times \underline{B}(0) \right]_i$$

$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}(0)$$

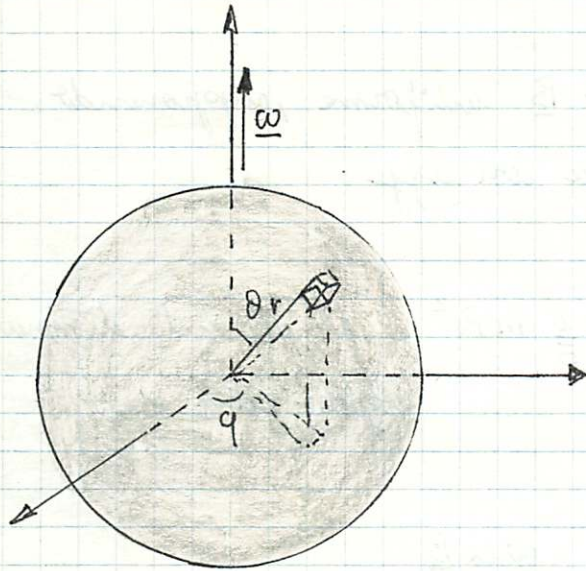
If we interpret the force as the negative gradient of a potential energy $\mathcal{U}$, we find

$$\mathcal{U} = - \underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{x})$$

for a current confined to a plane loop of area S such that $\underline{B} = \text{const}$ in S

$$\underline{m} = \hat{n} I S \quad \mathcal{U} = - I (S \hat{n} \cdot \underline{B}) = - I \phi(B)$$

Calcolare il momento di dipolo magnetico di una sfera di raggio R uniformemente carica con carica totale Q e ruotante con velocità angolare ω intorno ad un suo diametro. Si determini ω nel caso di un protone assumendo $R = 1.3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ e $m = 1.4 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$



Si consideri un punto della sfera individuato dalle coordinate r, θ e φ e l'elemento di volume infinitesimo associato

$$dr \, r d\theta \, r \sin\theta \, d\varphi$$

in cui è contenuta una carica dQ

il momento di dipolo magnetico $\underline{m}$ è diretto come $\underline{\omega}$ (se $Q > 0$) o vale

$$dm = d\mathbf{I} \cdot \mathbf{S} = \frac{dQ}{T} \pi (r \sin\theta)^2 = \frac{\omega}{2\pi} \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$\cdot \pi r^2 \sin^2\theta = \frac{3}{8\pi} \frac{\omega Q}{R^3} r^4 \sin^3\theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$m = \frac{3}{8\pi} \frac{Q\omega}{R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{3}{8\pi} \frac{Q\omega}{R^3} \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{1}{5} Q \omega R^2$$

Nel caso del protone:

$$\omega = \frac{5m}{QR^2} = \frac{5 \cdot 1.4 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (1.3 \cdot 10^{-15})^2 \text{ m}^2} = 2.6 \cdot 10^{23} \text{ rad s}^{-1}$$

Se la sfera è immersa in un campo $\underline{B}$ uniforme, supponendo che sia fulcrata al centro, essa si muove con legge:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \underline{m} \times \underline{B} \quad \text{dove } I = \frac{2}{5} m R^2 \text{ è il momento di inerzia rispetto ad un asse}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I} \frac{QR^2}{5} \underline{\omega} \times \underline{B} = \frac{1}{2} \frac{Q}{m} \underline{\omega} \times \underline{B}$$

che è un moto di precessione di $\underline{\omega}$ intorno a $\underline{B}$ con ω costante

$$\frac{d}{dt} \omega^2 = 2 \underline{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{Q}{m} \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{B}) = 0$$



la velocità angolare di precessione è:

$$\omega_p = \frac{QB}{2m}$$

(1)

Una sferetta

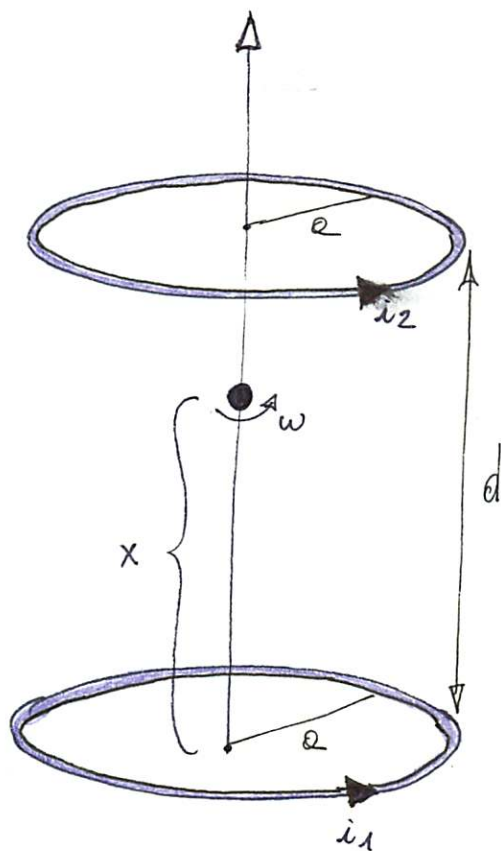
di massa M e raggio R è libera

di scorrere senza attrito lungo un'asse verticale passante per un suo diametro. La sferetta ha carica Q ^{distribuita unif. sulla} ~~è~~ ^{superficie} ~~rotata~~ intorno all'asse ^{citato} con velocità angolare ω in senso antiorario.

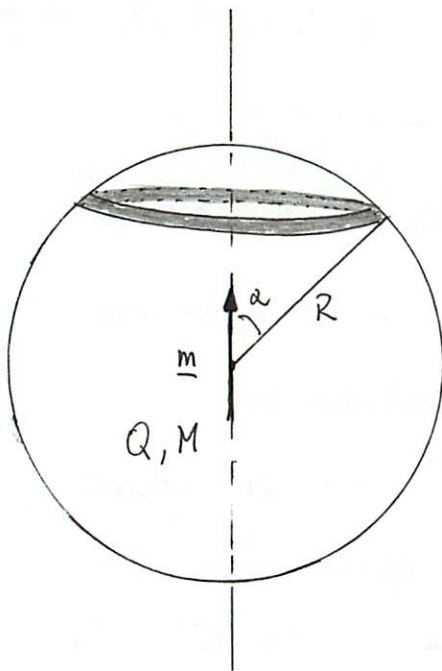
Due spire circolari di raggio a e distanti tra loro d sono disposte come mostrato in figura. Esse sono percorse da due correnti i_1 ed i_2 dirette in senso antiorario.

Determinare la relazione tra i_1 ed i_2 affinché la sferetta sia in equilibrio a metà strada tra le spire.

Si dia il valore numerico di $i_2 - i_1$ per $M = 10^{-25} \text{ kg}$, $R = 10^{-8} \text{ m}$, $Q = 8 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $a = 1 \text{ mm}$, $d = 1 \text{ cm}$ ed $\omega = 10^{14} \text{ rad s}^{-1}$



calcolo di m :



poiché la carica Q è distribuita uniformemente sulla sfera si ha:

$$\begin{aligned} dm &= dI \cdot S = \frac{dQ}{T} \cdot \pi (R \sin \alpha)^2 = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \frac{Q}{4\pi R^2} 2\pi R \sin \alpha R d\alpha \quad \pi R^2 \sin^2 \alpha = \\ &= \omega Q R^2 \frac{1}{4} \sin^3 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

$$m = \frac{1}{4} \omega Q R^2 \int_0^\pi \sin^3 \alpha d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4} \omega Q R^2 \left(\int_0^\pi \sin \alpha d\alpha - \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \omega Q R^2 \left(\cos \alpha \Big|_\pi^0 + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \Big|_0^\pi \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \omega Q R^2 \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \omega Q R^2$$

(2)

Le sfere cariche in rotazione
costituisce un momento di dipolo magnetico di
modulo

$$m = \frac{1}{3} Q \omega R^2$$

diretto verso l'alto se $Q > 0$.

Quando la sferetta si trova alla quota x dal piano
della spirale l'energia potenziale magnetica è

$$\mathcal{U}_m = -\underline{m} \cdot \underline{B}_1 - \underline{m} \cdot \underline{B}_2 =$$

$$= -m \frac{\mu_0}{2} \frac{i_1 \omega^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - m \frac{i_2 a^2}{[a^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \frac{\mu_0}{2}$$

Inoltre la sferetta possiede energia potenziale gravitazionale

$$\mathcal{U}_g = M g x$$

In condizioni di equilibrio

$$\frac{d}{dx} (\mathcal{U}_m + \mathcal{U}_g) = 0$$

$$-m \frac{\mu_0}{2} \omega^2 \left[-\frac{3}{2} \frac{i_1 2x}{(a^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{3}{2} \frac{i_2 2(d-x)}{[a^2 + (d-x)^2]^{5/2}} \right] + M g = 0$$

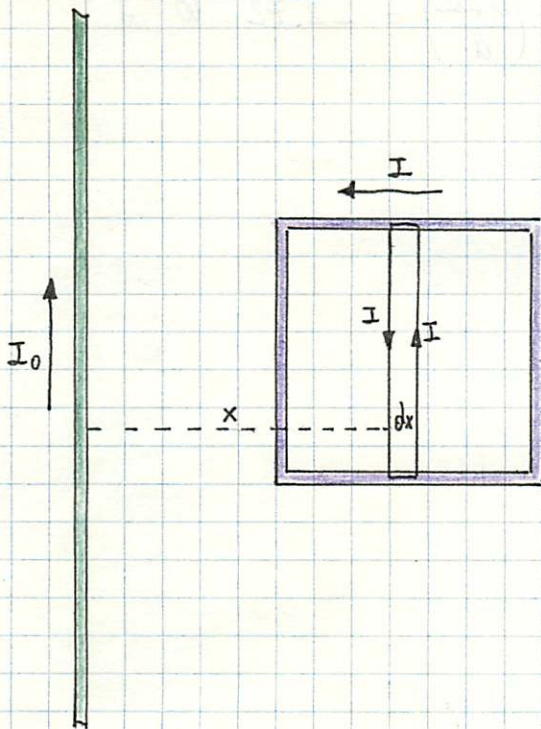
per $x = \frac{d}{2}$

$$m \mu_0 \frac{3}{4} \frac{\omega^2 d}{\left(\omega^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{5/2}} \left[i_1 - i_2 \right] + M g = 0$$

$$\begin{aligned} i_2 - i_1 &= \frac{4}{3} \frac{M g \left(\omega^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{5/2}}{\mu_0 \omega^2 d \frac{1}{3} Q \omega R^2} \\ &= \frac{4 M g \left(\omega^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{5/2}}{\mu_0 \omega^2 d R^2 Q \omega} = 0.39 \text{ A} \end{aligned}$$

Il risultato trovato vale nell'approssimazione di dipolo
cioè quando i campi $\underline{B}_1$ e $\underline{B}_2$ variano poco sulle
scale di lunghezza R

Una spira quadrata di lato $a = 34 \text{ cm}$ percorsa da corrente stazionaria $I = 0.5 \text{ A}$ è immersa nel campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente $I_0 = 8 \text{ A}$. La spira è complanare con il filo e dista da esso 20 cm . Che lavoro si compie per allontanare la spira all'infinito?



Sia la corrente I diretta in senso antiorario.

La spira costituisce un dipolo magnetico di momento

$$m = IS = I a^2$$

Il campo magnetico generato dal filo non è costante ma dipende dalla distanza x da esso:

$$B_0(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{x}$$

in generale la dipendenza da x non può essere troncata nelle scale e che fissa le dimensioni delle spire

La spira può essere decomposta in tante spire infinitesime di ora $a \times dx$ percorse da corrente I . L'energia magnetica di ciascuna di esse nel campo $B_0(x)$ vale:

$$dU = - d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0(x) = I a dx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{x}$$

detto d la distanza minima dalla spira al filo:

$$U(d) = \int_d^{d+a} dU = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 a \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

il lavoro fatto per portare la spira a distanza infinita $\bar{e}$:

$$L = U(\infty) - U(d) = 0 - \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) = -2.72 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

infatti la spira ed il filo si respingono

Per campi $\underline{B}$ non uniformi in generale si ha:

$$dU = - d\underline{m}(\underline{x}) \cdot \underline{B}(\underline{x}) = - \frac{1}{2} \underline{x} \times \underline{J}(\underline{x}) d^3x \cdot \underline{B}(\underline{x})$$

per spire piane $\frac{1}{2} \underline{x} \times \underline{J}(\underline{x}) d^3x = I \frac{1}{2} \underline{x} \times d\underline{\ell} = I dS \hat{n}$

$$dU = - I \underline{B}(\underline{x}) \cdot \hat{n} dS \quad U = - I \phi(\underline{B})$$