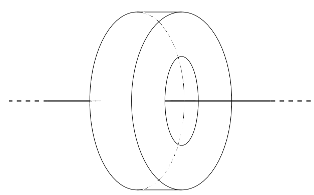
Corso di Laurea in Chimica Industriale
Fisica Generale (secondo corso)
II esonero – 20 dicembre 2001

Esercizio 1
Una piccola spira circolare di raggio $a = 1.0$ cm, composta di materiale dielettrico uniformente carico con densità di carica lineare $\lambda = 0.2 \times 10^{-9}$ $\mathrm{Cm^{-1}}$, ruota intorno al proprio asse con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}$ con $\omega = 1.0 \times 10^{3}$ rad $\mathrm{s^{-1}}$. A distanza $d = 8.0$ m dal centro della spira si trova un lungo filo cilindrico di raggio $b = 1.0$ mm parallelo all'asse di rotazione della spira e percorso da una densità di corrente uniforme $\boldsymbol{j} = j\boldsymbol{u}$ con $j = 3.0$ $\mathrm{Am^{-2}}$. Calcolare:
a) il momento magnetico $\boldsymbol{m}$ della spira;
b) il momento torcente $\boldsymbol{M}$ subito dalla spira nella posizione indicata;
c) il lavoro L fatto dal campo magnetico prodotto dal filo per ruotare la spira nella posizione di equilibrio.

Esercizio 2
Un toro di materiale ferroso, isotropo, lineare e omogeneo con $\mu_r = 1000$, è coassiale ad un filo rettilineo indefinito di sezione trascurabile in cui scorre una corrente stazionaria $i = 10.0$ A. Il raggio interno del toro è $R = 2.0$ cm, mentre la sua sezione è quadrata di lato $a = 2.0$ mm. Calcolare:
a) l'andamento dei campi $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ al variare della distanza r dall'asse dell'anello ($0 < r < \infty$);
b) il valore delle densità lineari di corrente amperiana $\boldsymbol{j}_s$ sulle quattro superfici del toro;
c) la forza esercitata tra le due superfici del toro che si affacciano sul traferro formato asportando una sezione del toro di spessore $d = 1.0$ mm.



Esercizio 1 Il momento magnetico della spira è dato da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= \pi a^2(\lambda 2\pi a)\frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi} \\ &= \pi\lambda a^3\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u}\ 6.3\times 10^{-13}\ \mathrm{Am}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Il campo magnetico prodotto dal filo è azimutale. Applicando la legge di Ampere a un percorso circolare di raggio $r > b$ concentrico con l'asse del filo, si ha

$$\oint_{2\pi r} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = B(r)2\pi r = \mu_0 j\pi b^2, \tag{2}$$

e quindi

$$B(r) = \frac{\mu_0 j b^2}{2r}. \tag{3}$$

Poichè $d \gg a$, il campo $\boldsymbol{B}$ può ritenersi uniforme sulla superficie della spira. Nella posizione iniziale la spira subisce un momento torcente

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} = M\boldsymbol{v}, \tag{4}$$

essendo $\boldsymbol{v}$ il versore della perpendicolare dal centro della spira al filo, di modulo

$$M = mB(d) = \pi\lambda a^3\omega\frac{\mu_0 j b^2}{2d} = 1.48\times 10^{-25}\ \mathrm{Nm}. \tag{5}$$

Il momento $\boldsymbol{M}$ ruota la spira in modo da portare $\boldsymbol{m}$ parallelo a $\boldsymbol{B}$. L' energia magnetica nella configurazione iniziale, $U_{\mathrm{in}} = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$, è nulla. Nella configurazione finale si ha

$$U_{\mathrm{fin}} = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B} = -mB(d). \tag{6}$$

Il lavoro fatto dal campo magnetico è quindi

$$L = U_{\mathrm{fin}} - U_{\mathrm{in}} = -mB(d) = -1.48\times 10^{-25}\ \mathrm{J}. \tag{7}$$

Esercizio 2 Per la simmetria del sistema, il campo $\boldsymbol{H}$ è azimutale. Applicando la legge di Ampere a un percorso circolare di raggio $0 < r < \infty$ concentrico con l'asse del filo, si ha

$$\oint_{2\pi r} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = H(r) 2\pi r = i, \qquad \text{e quindi} \qquad H(r) = \frac{i}{2\pi r}. \tag{8}$$

Considerato il materiale ferroso come lineare, isotropo e omogeneo, si ha $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H}$ e quindi

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & r < R, \ r > R + a \\ \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi r} & R < r < R + a \end{cases}, \tag{9}$$

$$M(r) = \begin{cases} 0 & r < R, \ r > R + a \\ \frac{(\mu_r - 1) i}{2\pi r} & R < r < R + a \end{cases}. \tag{10}$$

Siano $\boldsymbol{u}_z$, $\boldsymbol{u}_r$ e $\boldsymbol{u}_\varphi$ rispettivamente i versori della corrente i, quello radiale e quello azimutale. Sulla superficie laterale interna del toro si ha

$$\boldsymbol{j}_s = M(R) \boldsymbol{u}_\varphi \times (-\boldsymbol{u}_r) = M(R) \boldsymbol{u}_z = 7.95 \times 10^4 \ \mathrm{Am}^{-1}, \tag{11}$$

su quella laterale esterna

$$\boldsymbol{j}_s = M(R + a) \boldsymbol{u}_\varphi \times \boldsymbol{u}_r = -M(R + a) \boldsymbol{u}_z = -7.23 \times 10^4 \ \mathrm{Am}^{-1}. \tag{12}$$

Sulle superfici superiore e inferiore del toro $\boldsymbol{j}_s$ varia con la distanza r dall'asse. Sulla superficie superiore si ha

$$\boldsymbol{j}_s = M(r) \boldsymbol{u}_\varphi \times \boldsymbol{u}_z = M(r) \boldsymbol{u}_r, \tag{13}$$

e su quella inferiore

$$\boldsymbol{j}_s = M(r) \boldsymbol{u}_\varphi \times (-\boldsymbol{u}_z) = -M(r) \boldsymbol{u}_r. \tag{14}$$

In presenza del traferro di spessore d, a distanza r dall'asse la lunghezza del toro è $2\pi r - d$. Detti B_0 e H_0 i campi nel traferro, si ha $B_0(r) = B(r)$, $H_0(r) = B_0(r)/\mu_0$ e $H(r) = B(r)/\mu_0 \mu_r$. Se lo spessore del traferro viene portato al valore $d + x$, dalla legge di Ampere si ricava

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi r + (\mu_r - 1) d + \mu_r x}. \tag{15}$$

L'energia magnetica del sistema toro con traferro è

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_R^{R+a} \frac{B(r)^2}{2\mu_0 \mu_r} \, a(2\pi r - d) \, \mathrm{d}r + \int_R^{R+a} \frac{B(r)^2}{2\mu_0} \, a(d + x) \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r i^2 a}{4\pi} \ln \left(\frac{2\pi(R + a) + (\mu_r - 1) d + \mu_r x}{2\pi R + (\mu_r - 1) d + \mu_r x} \right). \end{aligned} \tag{16}$$

La forza tra le due superfici del traferro è attrattiva e vale

$$\begin{aligned} F &= + \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{-\mu_0 \mu_r^2 i^2 a^2}{2 \left[2\pi R + (\mu_r - 1) d \right] \left[2\pi (R + a) + (\mu_r - 1) d \right]} \\ &= -3.93 \times 10^{-12} \ \mathrm{N}. \end{aligned} \tag{17}$$